Tímarit um raunvísindi og stærðfræði
5. árg. 1. hefti 2008 – raust.is/2008/1/09

Spor, nykrar og kyrrapunktar

Jóhann Sigurðsson

Raunvísindastofnun Háskólans

Vefútgáfa: 15. desember 2008

Ágrip – Kyrrapunktssetning Hopf-Lefschetz gefur fullnægjandi skilyrði fyrir tilvist kyrrapunkta sjálfmótana vissra grannrúma. Við rifjum upp sönnun á þessari setningu sem er að mestu leyti formleg og byggir á því að skilgreina nykra og spor í faldríkjum og sýna að sterkir faldvarpar varðveita spor. Við gefum svo vísbendingar um hvernig alhæfa megi þá aðferðafræði sem hér er beitt til að styrkja setninguna þannig að hún gefi einnig nauðsynlegt skilyrði fyrir tilvist kyrrapunkta.

1. Inngangur

Stærðfræðingar vinna iðulega með söfn *hluta* sem eru tengdir með ýmsum *mótunum*. Í línulegri algebru gætu hlutirnir til dæmis verið vigurrúm yfir tiltekið svið k og mótanirnar k-línulegar mótanir. Í grannfræði gætu hlutirnir verið víðáttur eins og kúluhvel, hjólfletir (yfirborð kleinuhringja), varprúm o.s.frv. og mótanirnar gætu verið samfelldar varpanir. Þannig má segja að vinnuumhverfi stærðfræðinga sé skipt upp í tiltekin *ríki* sem samanstanda af safni hluta og mótunum sem má skeyta saman.

Þessi einfalda tiltekt á skrifborði stærðfræðinga, sem var innleidd með tungumáli ríkjafræðinnar um miðja síðustu öld, hefur skilað ótrúlegum framförum og er án efa ein megin stoðin undir núverandi gullöld stærðfræðiiðkunar. Reyndar má kveða svo fast að orði að án þessa tungumáls væru margar greinar nútíma stærðfræði hreinlega óhugsandi. Markmið okkar hér er öðrum þræði að sýna hvernig ríkjafræðin nýtist í raun.

Þegar viðfangsefnin hafa verið aðgreind á þennan hátt má bera saman *formlega eiginleika* ólíkra ríkja. Til þess má hugsa sér að úthluta sérhverri mótun í einu ríki mótun í öðru ríki þannig að samskeyting sé varðveitt

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "gf"'] & Y \arrow[d, "g"] \\ & Z \end{tikzcd} \qquad \overset{F}{\rightsquigarrow} \qquad \begin{tikzcd} FX \arrow[r, "Ff"] \arrow[dr, "F(gf)"'] & FY \arrow[d, "Fg"] \\ & FZ. \end{tikzcd}$$

Slíkar úthlutunarreglur milli ríkja eru kallaðar *varpar*.

Nú geta ríki haft ýmis mynstur. Til dæmis má spyrða saman tvö vigurrúm V og W og mynda summu þeirra $V \oplus W$, eða þá við gætum myndað þinfeldi þeirra $V \otimes_k W$. Svipað má gera í ríki víðátta. Ef X og Y eru tvær víðáttur, þá getum við myndað summu þeirra $X \amalg Y$ einfaldlega með því að leggja þær hlið við hlið, eða við gætum myndað margfeldi þeirra $X \times Y$. Allt eru þetta dæmi um *faldmynstur* á þessum ríkjum.

Við getum nú spurt hvort varpi frá grannríki eins og ríki víðátta inn í algebruríki, eins og ríki k-vigurrúma, varðveiti slík faldmynstur. Slíka varpa gætum við þá notað til þess að flytja hluti með tiltekna eiginleika m.t.t. mynstursins milli ríkjanna. Til að skýra þetta frekar skulum við hugsa okkur varpa H sem tekur margfeldi víðátta á þinfeldi vigurrúma. Við höfum margföldun

$$\mu\colon S^1 \times S^1 \longrightarrow S^1$$

á einingarhringnum S^1 í tvinntalnaplaninu sem er gefin með margföldun tvinntalna. Ef við beitum H á þessa margföldun fáum við

$$H(\mu)\colon H(S^1) \otimes_k H(S^1) \longrightarrow H(S^1)$$

sem gefur margföldun á vigurrúminu $H(S^1)$. Tengireglan og hlutleysan á S^1 gefur þá jafnframt samsvarandi reglur á $H(S^1)$ og því er $H(S^1)$ algebra yfir k.

Í þessari grein munum við nota þessa einföldu aðferðarfræði, að bera saman formlega eiginleika ríkja, til þess að sanna klassíska kyrrapunktssetningu kennda við Hopf og Lefschetz. Setningin fjallar um sjálfmótanir $f\colon X \longrightarrow X$ á vissum grannrúmum eins og þjöppuðum víðáttum. Við lítum á hlutrúmið

$$K_f = \{x \in X \mid f(x) = x\}$$

af öllum kyrrapunktum f og „teljum“ samkvæmt kúnstarinnar reglum fjölda þeirra. Þetta er vissulega einhverjum vandkvæðum háð því K_f þarf ekki að vera endanlegt og telja þarf með „margfeldni“. En hvað um það, þetta er hægt að gera á skynsamlegan hátt og gefur okkur *kyrrapunktsvísi* Lefschetz, I_f. Setningin segir okkur þá að I_f megi reikna sem spor ákveðinnar línulegrar sjálfmótunar $H(f)$, þar sem H er faldvarpi inn í ríki vigurrúma yfir $\mathbb{Q}$. Ef $I_f \neq 0$, þá getum við ályktað að f hafi a.m.k. einn kyrrapunkt.

Mikilvægt er að gera sér grein fyrir því að þó að kyrrapunktsvísirinn hverfi, þá geta kyrrapunktar samt sem áður verið til staðar. Ástæðan er sú að þar sem kyrrapunktarnir eru taldir með margfeldni, þá gæti einn haft margfeldni 1 á meðan annar hefur margfeldni -1 og þeir því upphafið hvor annan. Til að forðast þetta þarf að setja meiri upplýsingar inn í fastapunktsvísinn og því lýsum við í lokin.

Til þess að gera greinina aðgengilegri höfum við eftirlátið þeim sem meira vita að fylla í ýmsar eyður. Tilgangur okkar er að lýsa almennri aðferðafræði en ekki að gefa nákvæmar sannanir á þeim niðurstöðum sem við nefnum. Þeim sem vilja fræðast frekar er vísað á heimildaskrána.

Rétt er að geta þess að framsetning efnisins er mjög á skjön við hver sögulega þróunin var. Það var ekki fyrr en í lok áttunda áratugar síðustu aldar sem Albrecht Dold og Dieter Puppe [1] gáfu fyrstir skilgreiningu á sporum í almennum faldríkjum og bentu á hvernig sanna mætti kyrrapunktssetninguna frá því sjónarhorni eins og við gerum hér. Sú leið að andhverfu kyrrapunktssetningarinnar sem ég lýsi í lokin er innan við árs gömul. Kate Ponto [3] gefur slíka sönnun í doktorsritgerð sinni við Chicago háskóla 2007, en hún byggir annarsvegar á nýlegum niðurstöðum John Klein og Bruce Williams [2] og hinsvegar á niðurstöðum höfundar og Peter May [5].

2. Spor og nykrar í algebruríkjum

Látum k vera svið, til dæmis ræðu tölurnar $\mathbb{Q}$, og látum $A = (a_{ij})$ vera $n \times n$-fylki yfir k. Spor fylkisins A er skilgreint sem summa hornalínustaka þess,

$$\chi(A) := \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Ef nú V er endanlega vítt vigurrúm yfir k og $f\colon V \longrightarrow V$ er sjálfmótun, þá getum við valið grunn (v_i) fyrir V og sett f fram sem fylki $A = (a_{ij})$ með tilliti til þessa grunns. Stök fylkisins A eru ótvírætt ákvörðuð af því að rita vigrana $f(v_j)$ sem línulega samantekt grunnvigranna

$$f(v_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} v_i.$$

Við freistum nú þess að skilgreina spor sjálfmótunarinnar f sem spor fylkisins A. En þá þarf $\chi(A)$ að sjálfsögðu að vera óháð valinu á grunninum fyrir vigurrúmið. Til að svo sé nægir að sýna að fyrir andhverfanlegt $n \times n$-fylki C, þá eru spor A og $C^{-1}AC$ þau sömu. Þetta má til dæmis gera með því að athuga að $\chi(BC) = \chi(CB)$ fyrir sérhver tvö endanleg ferningsfylki B og C og beita þessu svo á tilvikið $B = C^{-1}A$, því þá fæst að

$$\chi((C^{-1}A)C) = \chi(C(C^{-1}A)) = \chi(A).$$

Spor sjálfmótunar $f\colon V \longrightarrow V$ á endanlega víðu k-vigurrúmi má einnig skilgreina beint eins og við nú greinum frá. Til þess notum við mynstur sem eru til staðar á ríki k-vigurrúma. Fyrir tvö k-vigurrúm V og W getum við myndað ný vigurrúm $V \otimes_k W$, *þinfeldið* yfir k, og einnig $\hom_k(V, W)$, *rúm k-línulegra mótana* frá V til W. Þar sem ekki er hætta á misskilningi munum við einfalda rithþáttinn með því að rita $\otimes$ í stað $\otimes_k$ og $\hom$ í stað $\hom_k$.

Látum $V^* = \hom(V, k)$ vera nykurrúm V og skilgreinum náttúrlega línulega mótun

$$\nu\colon V^* \otimes W \longrightarrow \hom(V, W);\ \nu(f \otimes w)(v) := f(v)w.$$

Setning 1. *Mótunin ν er einsmótun fyrir öll k-vigurrúm W þá og því aðeins að vídd V sé endanleg.*

Sönnun. Ef vídd V er endanleg, þá veljum við grunn (v_i) fyrir V og látum (v_i^*) vera nykurgrunn hans, en hann er gefinn með $v_i^*(v_j) = \delta_{ij}$. Þá er andhverfa ν gefin með því að senda $f\colon V \longrightarrow W$ á $\sum v_i^* \otimes f(v_i)$.

Á hinn bóginn athugum við að vigra $V^* \otimes W$ má setja fram sem endanlegar summur $u = \sum f_i \otimes w_i$. Gildi ν á slíkri summu er mótunin

$$\nu(u)\colon\ V \xrightarrow{(f_1,\ldots,f_m)} k^m \xrightarrow{w} W$$

þar sem $w(a_1, \ldots, a_m) = \sum a_i w_i$. Af því leiðir að myndrúm $\nu(u)$ í W hefur endanlega vídd. Ef nú ν er einsmótun fyrir $W = V$ og þá sér í lagi átæk, þá er $\nu(u) = \mathrm{id}_V$ fyrir einhvern slíkan vigur u. En það gefur að myndrúm $\mathrm{id}_V = \nu(u)$ er endanlegt sem þýðir að V er endanlega vítt. $\square$

Athugasemd 2. Mótunina ν má almennar skilgreina fyrir hvaða mótla sem er yfir víxlbaug k. Það er ekki erfitt að sýna að eftirfarandi skilyrði eru jafngild:

1. Mótunin ν er einsmótun fyrir alla mótla W.
2. Mótunin ν er einsmótun fyrir $W = V$.
3. V er endanlega spannaður varpmótull.

Slíka mótla V köllum við *nykranlega* og fyrir þá gildir að $(V^*)^* \cong V$. Almennt er það þó veikara skilyrði heldur en að ν sé einsmótun. Þegar k er svið, þá er sérhver mótull frjáls, sér í lagi varpmótull og því nykranlegu vigurrúmin nákvæmlega þau endanlegu víðu.

Við látum nú $\eta\colon k \longrightarrow V \otimes V^*$ vera samskeytingu mótananna

$$k \xrightarrow{\iota} \hom(V, V) \xleftarrow{\nu} V^* \otimes V \xrightarrow{\tau} V \otimes V^*$$

þar sem $\iota(1) = \mathrm{id}_V$ og τ víxlar þáttum þinfeldisins. Við höfum einnig gildismótunina

$$\epsilon\colon V^* \otimes V \longrightarrow k;\ \epsilon(f \otimes v) := f(v).$$

Við getum nú gefið formlega skilgreiningu á spori sjálfmótunarinnar f sem vísar aðeins í þinfeldið $\otimes$ og mótanirnar ϵ, η og τ.

Skilgreining 3. Látum V vera endanlega vítt k-vigurrúm og f vera sjálfmótun á V. Þá er *spor* f samskeytingin

$$\chi(f)\colon\ k \xrightarrow{\eta} V \otimes V^* \xrightarrow{\tau} V^* \otimes V \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes f} V^* \otimes V \xrightarrow{\epsilon} k.$$

Mótunin $\chi(f)$ er vitanlega ótvírætt ákvörðuð af tölunni $\chi(f)(1) \in k$ sem við köllum einnig spor f.

Það er auðséð að þessi skilgreining er samkvæm þeirri fyrri. Ef (v_i) er grunnur fyrir V, þá er $\eta(1) = \sum v_i \otimes v_i^*$ eins og sjá má af því að gildi $\nu\tau$ á þessum vigri er id_V. Eins og áður látum við (a_{ij}) vera fylki f með tilliti til grunnsins og við fáum þá að

$$\chi(f)(1) = \sum_i v_i^*(f(v_i)) = \sum_{i,j} v_i^*(a_{ij} v_j) = \sum_i a_{ii}.$$

Tökum einnig eftir að ef $f = \mathrm{id}_V$, þá er sporið einfaldlega vídd vigurrúmsins V. Þar sem vídd nykursins V^* er sú sama og vídd V, þá sjáum við að ekki er hægt að þekkja í sundur endanlega vítt vigurrúm og nykur þess af sporum þeirra. Ekki frekar en spor nykra þjóðsagnanna þekkjast frá sporum venjulegra hrossa.

Athugasemd 4. Setjum nú $W = V^*$. Þá eru eftirfarandi samskeytingar samsemdarmótunin

$$V \cong k \otimes V \xrightarrow{\eta \otimes \mathrm{id}} (V \otimes W) \otimes V \cong V \otimes (W \otimes V) \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes \epsilon} V \otimes k \cong V$$

og

$$W \cong W \otimes k \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes \eta} W \otimes (V \otimes W) \cong (W \otimes V) \otimes W \xrightarrow{\epsilon \otimes \mathrm{id}} k \otimes W \cong W$$

þar sem einsmótanirnar eru tengi- eða einingarmótanir þinfeldisins. Það er ekki erfitt að sjá að til er vigurrúm W og mótanir $\epsilon\colon W \otimes V \longrightarrow k$ og $\eta\colon k \longrightarrow V \otimes W$ þannig að samskeytingarnar hér að ofan séu samsemdarvarpanirnar þá og því aðeins að V sé nykranlegt. Jafnframt gefur aðokun ϵ, sem er mótunin

$$\bar{\epsilon}\colon W \longrightarrow \hom(V, k);\ \bar{\epsilon}(w)(v) := \epsilon(w, v),$$

þá einsmótun milli W og V^*. Þetta gildir almennar um mótla yfir víxlbauga og bætir enn einni auðkenningunni á nykranlegum mótlum við athugasemd 2.

Niðurstöðu þessa hluta má orða sem svo að eina mynstrið sem við þurfum á ríki k-vigurrúma til þess að skilgreina nykranleg vigurrúm og spor sjálfmótana er þinfeldið. Í næstu tveimur hlutum munum við lýsa mynstri með sömu formlegu eiginleika á samtogunarríki punktaðra rúma. Í §5 munum við svo gera nákvæma grein fyrir því hverjir þessir formlegu eiginleikar eru.

3. Samtogunarríkið

Lítum nú á ríki punktaðra grannrúma. Lesandinn sem ekki þekkir grannrúm getur hugsað um firðrúm í staðinn, eða jafnvel frekar þynnurúm sem eru búin til með því að líma saman þynnur, eða „gúmmípjötlur“, sem eru í laginu eins og diskarnir

$$D^n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}.$$

Nánar tiltekið eru þau mynduð með því að byrja með strjált mengi af 0-þynnum. Þá eru jaðrar á 1-þynnum límdir við þetta mengi til að mynda 1-grind rúmsins X_1 og svo koll af kolli. Í n-ta skrefinu límum við jaðra n-þynna við $(n-1)$-grindina X^{n-1} til að mynda n-grindina X^n.

Dæmi 5. Við getum myndað einvíða hringinn S^1 á marga vegu sem þynnurúm. Til dæmis getum við byrjað með tvær 0-þynnur sem við hugsum um sem gagnstæða punkta á hringnum og skipta honum í tvennt, segjum efri og neðri hluta. Við tengjum svo 0-þynnurnar með tveimur 1-þynnum, önnur gefur efri hlutann og hin þann neðri. Einnig gætum við byrjað með eina 0-þynnu og límt svo báða punkta jaðars 1-þynnu við þessa 0-þynnu. Lesandinn getur svo skemmt sér við að setja tvívíða kúluhvelið og kleinuhringinn fram sem þynnurúm.

Við munum þó halda okkur við grannrúmin þar sem einfaldast er að lýsa flestum aðgerðum á þeim. Nánar tiltekið eru hlutirnir grannrúm X sem hafa tilgreindan punkt $* \in X$ sem er kallaður *grunnpunktur*. Mótanirnar $f\colon X \longrightarrow Y$ eru samfelldar varpanir þannig að $f(*) = *$. Ef X er grannrúm sem ekki hefur grunnpunkt, þá má mynda sundurlæga summu X við einstaks rúmið $\{*\}$ og fá $X_+ = X \amalg \{*\}$ þar sem við lítum á $*$ sem grunnpunkt. Þessi aðgerð, að bæta við sundurlægum grunnpunkti, er reyndar varpi sem er vinstri aðoki varpans sem gleymir tilvist grunnpunktsins. *Punktsumma* tveggja punktaðra rúma X og Y er

$$X \vee Y := (X \amalg Y)/* \sim *$$

þar sem við samsömum grunnpunktana. Ef við tökum einhvern punkt hringsins S^1 sem grunnpunkt, þá er til dæmis $S^1 \vee S^1$ í laginu eins og talan 8. Við skilgreinum *sláfeldi* X og Y sem

$$X \wedge Y := (X \times Y)/(X \vee Y)$$

þar sem við samsömum allar tvenndir (x, y) þar sem annaðhvort x eða y er grunnpunktur viðkomandi rúms.

Við látum nú

$$S^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$$

vera n-víða kúluhvelið og tökum $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$ sem grunnpunkt. Af skilgreiningunni sjáum við strax að $S^0 \wedge X \cong X$ fyrir öll grannrúm X. Því er S^0 hlutleysa sláfeldisins líkt og k er hlutleysa þinfeldisins $\otimes_k$. Einnig höfum við eftirfarandi einföldu setningu sem er að vissu leyti ástæðan fyrir því hvers vegna sláfeldið er svona mikilvægt í samtogunarfræðum.

Setning 6. *Við höfum að*

$$S^n \wedge S^m \cong S^{n+m}.$$

Sönnun. Látum $I = [0, 1]$ vera lokaða bilið frá 0 til 1 á rauntalnalínunni. Þá er I^n n-víður teningur og við látum ∂I^n tákna jaðar hans. Nú er S^n grannmóta $I^n/\partial I^n$ og við höfum augljósa samfellda vörpun

$$f\colon I^{n+m} = I^n \times I^m \longrightarrow I^n/\partial I^n \wedge I^m/\partial I^m.$$

Sá hluti I^{n+m} sem f sendir á grunnpunktinn er jaðarinn. Við fáum því samfellda vörpun

$$\bar{f}\colon I^{n+m}/\partial I^{n+m} \longrightarrow I^n/\partial I^n \wedge I^m/\partial I^m$$

sem auðvelt er að sannfæra sig um að er gagntæk. Andhverfan er einnig samfelld, en það leiðir meðal annars af því að $\bar{f}$ er gagntæk vörpun frá þjöppuðu rúmi inn í Hausdorff rúm. □

Nú viljum við ekki gera greinarmun á tveimur grannrúmum ef hægt er að teygja og toga annað þeirra þannig að það líti út eins og hitt. Þannig viljum við til að mynda ekki gera greinarmun á tvívíða kúluhvelinu S^2 og yfirborði þrívíðs tenings, eða á yfirborðum kleinurhings $S^1 \times S^1$ og kaffibolla. Til þess samsömum við tvær varpanir ef við getum togað aðra til þannig að hún sé eins og hin, án þess að rífa eða slíta neitt í sundur. Þetta gefur jafngildisvensl og við skilgreinum *samtogunarríki* punktaðra grannrúma sem ríkið þar sem hlutirnir eru grannrúma, en mótanirnar eru jafngildisflokkar samtoga varpana. Við táknum þetta ríki með $h\mathcal{T}$.

Ef A er hlutrúm X, þá getum við myndað deildarúmið X/A með því að samsama alla punka A í einn. Við getum þá einnig tekið þann punkt sem náttúrlegan grunnpunkt X/A. Þetta er þó heldur villimannsleg aðgerð ef hlutrúmið A „liggur ekki vel“ í X. Lauslega sagt þá „liggur hlutrúmið A vel í X“ og við segjum þá að ívarpið $A \subset X$ sé *hjátrefjun*, ef til er grennd U við lokaða hlutrúmið A í X sem hægt er að draga inn í A með samtogun á X án þess að hreyfa punktana í A. Við höfum þá jafnframt *inndrátt* $r\colon U \longrightarrow A$ sem er samsemdarvörpunin á A.

Í samtogunarríkinu má alltaf búa til samtogamóta rúm $M(X, A)$ við X þannig að $A \subset M(X, A)$ sé hjátrefjun. Þetta er gert með því að setja

$$M(X, A) := X \times 0 \cup A \times [0, 1]$$

sem er augljóslega samtogamóta X. Einnig er $A \cong A \times 1 \subset M(X, A)$ hjátrefjun með inndrátt ofanvarpið $A \times [\frac{1}{2}, 1] \longrightarrow A \times 1 \cong A$. Þannig er $M(X, A)$ rúmið sem fæst með því að reisa turn $A \times [0, 1]$ á $A \times 0 \subset X \times 0$ og líta á toppinn á turninum sem hlutrúmið A.

Setjum nú

$$C(X, A) := M(X, A)/A \times 1.$$

Við höfum þá reist keilu á hlutrúmið A í X og tökum topppunkt keilunnar sem grunnpunkt $C(X, A)$. Ef $A = \emptyset$, þá er $C(X, \emptyset) = X_+$ þar sem við höfum bætt við grunnpunkti við X og ef $X = A$, þá er $CX = X \times I/X \times 1$ keila X sem er samtogamóta rúmi með aðeins einn punkt.

Aðgerðin að mynda $C(X, A)$ hegðar sér miklu betur heldur en að búa til deildarúmið X/A. Í samtogunarríkinu er $C(X, A)$ samtogamóta X/A ef ívarpið $A \subset X$ er hjátrefjun. Losaraleg samlíking er að bera hjátrefjanir $A \subset X$ saman við normlegar hlutgrúpur $N \lhd G$. Ef $H < G$ er ekki normleg, þá er ekki hægt að mynda G/H skynsamlega sem grúpu.

Dæmi 7. Við bendum á hversu ólík X/A og $C(X, A)$ geta verið ef $A \subset X$ er ekki hjátrefjun. Til dæmis er $C(\mathbb{R}, \mathbb{R} - 0) \simeq S^1$ á meðan að $\mathbb{R}/(\mathbb{R} - 0)$ samanstendur af tveimur punktum sem eru nánast límdir saman.

4. Nykrar í samtogunarríkinu

Látum nú M vera þjappaða m-víðáttu, þ.e.a.s. þjappað grannrúm þar sem sérhver punktur hefur grennd sem er grannmóta $\mathbb{R}^m$. Lesandinn gæti kosið að hugsa um þjálar víðáttur, en um þær gildir jafnframt að sérhver punktur hefur m-vítt snertlarúm sem saman gefa snertlabundin τ yfir M. Það má greypa M í eitthvert evklíðskt rúm $\mathbb{R}^n$ og $M \subset \mathbb{R}^n$ er hjátrefjun með grenndarinndrátt $r\colon U \longrightarrow M$ þar sem U er opin grennd við M. Við getum látið U vera slöngugrennd við M og hugsað um trefjurnar $r^{-1}(m) \subset U$ sem þverla á M í punktinum m. Þannig má samsama U við þverlabundin ν yfir M.

Eftirfarandi setning ætti að minna á athugasemd 4 og segir okkur að við ættum að líta á $C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - M)$ sem „n-nykur“ M_+. Við munum sjá í hjálparsetningu 10 að

$$C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - M) \simeq C(U, U - M)$$

og því má lýsa n-nykri M_+ sem $U/\partial U$, þar sem við höfum samsamað jaðar slöngugrenndarinar í einn punkt.

Setning 8. *Ef X er þjappað hlutrúm $\mathbb{R}^n$ þannig að ívarpið $X \subset \mathbb{R}^n$ er hjátrefjun, þá eru til varpanir*

$$\eta\colon S^n \longrightarrow X_+ \wedge C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - X) \qquad \textit{og} \qquad \epsilon\colon C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - X) \wedge X_+ \longrightarrow S^n$$

þannig að eftirfarandi örvarit eru víxlin í samtogunarríkinu

$$\begin{tikzcd}
S^n \wedge X_+ \arrow[r, "\eta\wedge id"] \arrow[dr, "\tau"'] & X_+ \wedge C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - X) \wedge X_+ \arrow[d, "id\wedge\epsilon"] \\
& X_+ \wedge S^n
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - X) \wedge S^n \arrow[r, "id\wedge\eta"] \arrow[d, "\tau"'] & C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - X) \wedge X_+ \wedge C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - X) \arrow[d, "\epsilon\wedge id"] \\
S^n \wedge C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - X) \arrow[r, "\sigma\wedge id"] & S^n \wedge C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - X).
\end{tikzcd}$$

Hér er $\sigma\colon S^n \longrightarrow S^n$ vörpunin sem fæst frá eins-punkts þjöppuninni á $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n;\ x \mapsto -x$.

Nú mótmælir lesandinn sjálfsagt og bendir réttilega á að hér sé ekki allt alveg formlega eins og í §2. Til að mynda sé S^n ekki hlutleysa sláfeldisins og eitthvað sé um auka varpanir í örvaritunum hér að ofan. Ástæðan er sú að við höfum ekki verið að vinna í rétta ríkinu! Minnumst þess að $S^n \wedge S^m \cong S^{n+m}$ og ef við nú byggjum svo vel að hafa *neikvæð* kúluhvel, þá gætum við tekið sláfeldi S^{-n} við η og ϵ til að fá þær mótanir á rétt form. Nykur X_+ samkvæmt því ætti þá að vera $C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - X) \wedge S^{-n}$.

Án þess að við lýsum því hvernig það sé gert, þá má útvíkka samtogunarríkið þannig að við það bætist þessi neikvæðu kúluhvel (og þá nauðsynlega margir aðrir áhugaverðir hlutir) og það er varpi

$$\Sigma^\infty\colon h\mathcal{T} \longrightarrow h\mathcal{S}$$

frá samtogunarríki punktaðra rúma inn í þetta nýja ríki, sem kallast *stöðuga samtogunarríkið*. Stöðuga samtogunarríkið hefur einnig sláfeldi og varpinn Σ^∞ virðir sláfeldið (er sterkur faldvarpi eins og við komum að í næsta hluta). Eftir að við beitum varpanum $\Sigma^\infty(-) \wedge S^{-n}$ á ofangreinda setningu fáum við *nákvæmlega* sömu formlegu eiginleikana sem auðkenndu nykurmótla í athugasemd 4.

Setning 9. *Ef X er þjappað hlutrúm $\mathbb{R}^n$ þannig að ívarpið $X \subset \mathbb{R}^n$ er hjátrefjun, þá er $\Sigma^\infty X_+$ nykranlegur hlutur í stöðuga samtogunarríkinu með nykur $\Sigma^\infty C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - X) \wedge S^{-n}$. Auk þess eru allir nykranlegir hlutir stöðuga samtogunarríkisins af þessari gerð.*

Við lýsum sönnun setningar 9 ekki nánar. Hinsvegar skulum við skilgreina varpanirnar ϵ og η sem getið var um í setningu 8, en lesandanum er eftirlátin sönnunin að öðru leyti. Við byrjum á eftirfarandi hjálparsetningum.

Hjálparsetning 10. *Ef $U \subset A \subset X$, þá gefur ívarpið vörpun*

$$C(X - U, A - U) \longrightarrow C(X, A)$$

sem er samtogamótun ef $A - U \subset X - U$ og $A \subset X$ eru hjátrefjanir.

Hjálparsetning 11. *Vörpunin*

$$\alpha\colon C(X, A) \wedge C(Y, B) \longrightarrow C(X \times Y, X \times B \cup A \times Y)$$

sem er skilgreind með

$$\alpha((x, s) \wedge (y, t)) = (x, y, \max\{s, t\})$$

er grannmótun ef $A = \emptyset$ eða ef $B = \emptyset$, og hún er samtogamótun ef annaðhvort $A \subset X$ eða $B \subset Y$ er hjátrefjun.

Við skilgreinum ϵ með því að krefjast þess að eftirfarandi örvarit sé víxlið

$$\begin{tikzcd}
C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - X) \wedge X_+ \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[d, "\epsilon"'] & & C(\mathbb{R}^n \times X, (\mathbb{R}^n - X) \times X) \arrow[d, "C(d)"] \\
S^n & C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - B) \arrow[l, "\simeq"'] \arrow[r, "\simeq"] & C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - 0).
\end{tikzcd}$$

Hér er $d(x, y) = x - y$, B er bolti um 0 í $\mathbb{R}^n$ sem inniheldur X og $\simeq$ gefur til kynna einsmótanir í samtogunarríkinu. Eins skilgreinum við η með eftirfarandi örvariti

$$\begin{tikzcd}
S^n \arrow[dd, "\eta"'] & C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - B) \arrow[l, "\simeq"'] \arrow[r] & C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - X) \\
 & & C(U, U - X) \arrow[u, "\simeq"'] \arrow[d, "C(\Delta)"] \\
X_+ \wedge C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - X) \arrow[r, "\alpha"] & C(X \times \mathbb{R}^n, X \times (\mathbb{R}^n - X)) & C(U \times \mathbb{R}^n, U \times (\mathbb{R}^n - X)). \arrow[l, "r \times \mathrm{id}"']
\end{tikzcd}$$

þar sem $\Delta(x) = (x, x)$ er hornalínuvörpunin og $r\colon U \longrightarrow X$ er grenndarinndráttur.

5. Samhverf faldríki, nykrar og spor

Áður en lengra er haldið skulum við lýsa stuttlega því sameiginlega formlega mynstri sem við höfum hingað til verið að draga fram. Nánari umfjöllun um efni þessa hluta getur lesandinn fundið í [4].

Skilgreining 12. *Ríki* $\mathcal{C}$ samanstendur af:

- safni *hluta*,
- mengi *mótana* $\mathcal{C}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ fyrir sérhverja tvo hluti A og B,
- tenginni samskeytingu

  $$\circ\colon \mathcal{C}(\mathcal{B}, \mathcal{C}) \times \mathcal{C}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \longrightarrow \mathcal{C}(\mathcal{A}, \mathcal{C})$$

  fyrir sérhverja þrjá hluti A, B og C,
- *samsemdarmótun* $\mathrm{id}_A \in \mathcal{C}(\mathcal{A}, \mathcal{A})$ fyrir sérhvern hlut A sem er hlutleysa fyrir samskeytinguna.

Dæmi 13. Hér eru nokkur dæmi um ríki.

1. Ríki mengja, sem við táknum með $\mathcal{S}et$. Hlutirnir eru mengi og mótanirnar eru varpanir á milli mengja.
2. Ríki k-vigurrúma yfir svið k, sem við táknum með $\mathcal{V}_k$. Hlutirnir eru k-vigurrúm og mótaniranr eru k-línulegar mótanir. Þetta er sértilfelli ríkis allra k-mótla, $\mathcal{M}_k$, þar sem k er víxlbaugur.
3. Punktaða samtogunarríkið $h\mathcal{T}$. Hlutirnir eru punktuð grannrúm og mótanirnar eru samtogunarflokkar samfelldra varpana.

Þessi dæmi hafa það yfirbragð að vera ákaflega stór. En *smáríki* (þar sem safn hlutanna er mengi) eru ekki síður áhugaverð.

4. Ríki með aðeins einn hlut er það sama og mengi með tenginni reikniaðgerð sem hefur hlutleysu. Slíkt mynstur er oft kallað *hálfgrúpa* eða *földungur*.
5. Ríki þar sem allar mótanirnar eru andhverfanlegar kallast *grýpi*. Nafnið skýrist af því að grýpi sem hefur aðeins einn hlut er það sama of grúpa. Þrátt fyrir að grýpi rími við skrípi þá eru slík ríki engin viðundur. Þvert á móti eru þau ákaflega gagnleg. Sem dæmi getum við tekið *undirstöðugrýpi* grannrúms X, sem er táknað ΠX. Hlutirnir eru punktar X og mótanirnar $u\colon x \longrightarrow y$ eru jafngildisflokkar samfelldra varpana, eða vega, $u\colon [0,1] \longrightarrow X$ þar sem $u(0) = x$ og $u(1) = y$. Tveir vegir eru í sama flokki ef milli þeirra er vegsamtogun, en það er samtogun sem heldur endapunktunum alltaf föstum.

Skilgreining 14. *Varpi* $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ frá ríki $\mathcal{C}$ til ríkis $\mathcal{D}$ er regla sem:

- úthlutar hlut $F(A) \in \mathcal{D}$ fyrir sérhvern hlut $A \in \mathcal{C}$,
- úthlutar mótun $F(f)\colon F(A) \longrightarrow F(B)$ í $\mathcal{D}$ fyrir sérhverja mótun $f\colon A \longrightarrow B$ í $\mathcal{C}$,

þannig að samskeyting er varðveitt, $F(gf) = F(g)F(f)$.

Dæmi 15. Hér eru nokkur dæmi um varpa.

1. Skilgreinum varpa $F\colon \mathcal{S}et \longrightarrow \mathcal{V}_k$ með því að senda mengi B á vigurrúmið $F(B) = \bigoplus_B k$ með grunn B. Þar sem línuleg mótun ákvarðast af gildum sínum á grunnvigrunum, þá ákvarðar vörpun $f\colon B \longrightarrow C$ milli mengja ótvíræða línulega mótun $F(f)\colon F(B) \longrightarrow F(C)$.
2. Við höfum varpa frá ríki grannrúma inn í ríki punktaðra grannrúma sem bætir sundurlægum grunnpunkti við sérhvert grannrúm. Hann gefur af sér varpa frá samtogunarríkinu inn í punktaða samtogunarríkið.
3. Smíðin $C(X,A)$ í §3 gefur varpa frá ríki allra grannrúma með hlutrúm, sem við táknum með $\mathcal{U}^2$, inn í ríki punktaðra grannrúma. Hlutirnir í $\mathcal{U}^2$ eru tvenndir (X,A) þar sem A er hlutrúm í X og mótanirnar $f\colon (X,A) \longrightarrow (Y,B)$ eru samfelldar varpanir $f\colon X \longrightarrow Y$ þannig að $f(A) \subset B$.
4. Við höfum varpa $\Sigma^\infty\colon h\mathcal{T} \longrightarrow h\mathcal{S}$ frá punktaða samtogunarríkinu inn í stöðuga samtogunarríkið.

Skilgreining 16. *Faldmynstur* á ríki $\mathcal{C}$ samanstendur af

- varpa
$$\Box\colon \mathcal{C} \times \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$$
sem við köllum *földun* ríkisins,
- hlut I, sem við köllum *einingu* földunarinnar,

þannig að $\Box$ er tengin aðgerð með hlutleysu I, upp að samheldnum náttúrlegum einsmótunum. Faldmynstrið er *samhverft* ef földunin $\Box$ er víxlin, aftur upp að samheldinni náttúrlegri einsmótun.

Við tilgreinum ekki nánar hér hvað við eigum við með „samheldnum“ náttúrlegum einsmótunum en lesandinn getur flett því upp í [4]. Þar sem $\Box$ er aðeins tengin upp að einsmótun, þá þarf að tryggja að hvernig svo sem földunin $A\Box B\Box C\Box D$ er framkvæmd, þá séu allar útkomurnar samheldnar í vissum skilningi.

Dæmi 17. Þinfeldið $\otimes_k$ gefur faldmynstur á ríki k-vigurrúma með hlutleysu k. Það er samhverft, en auk þess er það *lokað* því varpinn $- \otimes_k V$ hefur hægri aðokun $\hom_k(V, -)$, þ.e.

$$\mathcal{V}_k(U \otimes_k V, W) \cong \mathcal{V}_k(U, \hom_k(V, W)).$$

Einnig höfum við lýst samhverfu faldmynstri á punktaða grannríkinu $\mathcal{T}$ sem er gefið með sláfeldinu. Hlutleysan er S^0. Eins hefur punktaða samtogunarríkið og stöðuga samtogunarríkið faldmynstur sem eru gefin með sláfeldinu og varpinn $\Sigma^\infty \colon h\mathcal{T} \longrightarrow h\mathcal{S}$ er faldvarpi eins og í næstu skilgreiningu.

Skilgreining 18. Varpi $F \colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ milli faldrúma er *faldvarpi* ef til eru náttúrlegar mótanir

$$F(A)\Box_{\mathcal{D}}F(B) \Longrightarrow F(A\Box_{\mathcal{C}}B) \qquad \text{og} \qquad I_{\mathcal{D}} \Longrightarrow F(I_{\mathcal{C}})$$

sem virða tengiregluna á „samheldinn máta“. Við segjum að F sé *sterkur faldvarpi* ef ofangreindar mótanir eru einsmótanir.

Dæmi 19. Hlutur A í faldríki er kallaður *földungur* ef til eru mótanir

$$\mu \colon A\Box A \longrightarrow A \qquad \text{og} \qquad \eta \colon I \longrightarrow A$$

þannig að μ sé tengin margföldun á A með einingu I. Við sjáum að faldvarpar $F \colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ senda földunga í ríki $\mathcal{C}$ á földunga í ríki $\mathcal{D}$.

Við getum nú skilgreint nykra og spor í hvaða samhverfa faldríki sem er. Lesandinn ætti að bera næstu tvær skilgreiningar saman við athugasemd 4, setningu 8 og skilgreiningu 3.

Skilgreining 20. Hlutur A í faldríki $\mathcal{C}$ er *nykranlegur* með *nykur* B ef til eru mótanir $\epsilon \colon B\Box A \longrightarrow I$ og $\eta \colon I \longrightarrow A\Box B$ þannig að samskeytingarnar

$$A \cong I\Box A \xrightarrow{\eta\Box \mathrm{id}} (A\Box B)\Box A \cong A\Box(B\Box A) \xrightarrow{\mathrm{id}\Box\epsilon} A\Box I \cong A$$

og

$$B \cong B\Box I \xrightarrow{\mathrm{id}\Box\eta} B\Box(A\Box B) \cong (B\Box A)\Box B \xrightarrow{\epsilon\Box\mathrm{id}} I\Box B \cong B$$

séu samsemdarmótanirnar. Hér eru einsmótanirnar tengi- og einingarmótanir faldmynstursins.

Skilgreining 21. Látum A vera nykranlegan hlut í samhverfu faldríki $\mathcal{C}$ með nykur B. Ef $f \colon A \longrightarrow A$ er sjálfmótun A, þá er *spor* f skilgreint sem samskeytingin

$$\chi(f)\colon\ I \xrightarrow{\eta} A\Box B \xrightarrow{\tau} B\Box A \xrightarrow{\mathrm{id}\Box f} B\Box A \xrightarrow{\epsilon} I.$$

Allar þær skilgreiningar sem við höfum sett fram í þessari grein eru til þess að geta sannað eftirfarandi setningu.

Setning 22. *Látum $F \colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ vera sterkan faldvarpa.*

1. *Ef A er nykranlegur hlutur í $\mathcal{C}$ með nykur B, þá er $F(A)$ nykranlegur hlutur í $\mathcal{D}$ með nykur $F(B)$.*
2. *Ef $f \colon A \longrightarrow A$ er sjálfmótun nykranlegs hlutar í $\mathcal{C}$, þá er*

$$\chi(F(f)) \cong F(\chi(f)).$$

Sönnun. Þetta er næsta augljóst. Við einfaldlega beitum F á örvaritin í skilgreiningum 20 og 21 og notum svo eiginleika varpa og náttúrlegu einsmótanirnar í skilgreiningu 18. $\square$

Lesandinn skyldi varast að meta mikilvægi þessarar setningar af lengd sönnunarinnar. Oft hefur verið vitnað í orð Peter Freyd fyrir fjórum áratugum þar sem hann velti fyrir sér hvort tilgangur ríkjafræðinnar væri sá að gera hið augljósa augljóslega augljóst. Sumir hafa seinna viljað setja frasann „hið formlega formlega formlegt“ inn í staðinn, en sennilega gildir hér það sama og um allar greinar stærðfræðinnar, það skiptir höfuðmáli að skilgreina réttu hugtökin.

Setning 22 leyfir okkur að líta á spor $F(f)$ á tvennan máta. Það hefur löngum þótt fýsilegt í stærðfræði að komast í slíka stöðu, því ólík sjónarhorn gefa okkur gleggri mynd af viðfansefninu. Þetta munum við notfæra okkur í §7 til þess að sanna kyrrapunktssetningu Hopf-Lefschetz. En fyrst þurfum við að finna heppilega faldvarpa til að bera saman (stöðuga) samtogunarríkið og hentugt algebruríki.

6. Svipfræði

Í þessum hluta lýsum við vörpum sem kallast *venjulegu svipfræðin*. Nánar tiltekið eru þetta fjölskyldur varpa frá punktaða samtogunarríkinu inn í algebruleg ríki eins og ríki víxlgrúpa. Hugmyndin sem að baki býr er að nota svipfræðin til að endurspegla einhverja eiginleika grannríkisins í algebrulega ríkinu. Með því má oft setja flókin verkefni í samtogunarríkinu fram sem algebruleg verkefni og við berum þá von í brjósti að hið síðarnefnda sé viðráðanlegra en hið fyrra. Ein þessara svipfræða gefa okkur sterkan faldvarpa frá (stöðuga) samtogunarríkinu inn í ríki stigaðra $\mathbb{Q}$-vigurrúma. Í næsta hluta munum við svo nota þennan faldvarpa ásamt setningu 22 til þess að sanna kyrrapunktssetninguna sem við stefnum að.

Þar sem hér er ekki tóm til að skýra hvernig venjulegu svipfræðin eru búin til, þá látum við okkur einfaldlega nægja að setja fram án sönnunar eftirfarandi setningu sem auðkennir þau og gefur alla eiginleika sem við þurfum á að halda.

Setning 23. *Fyrir sérhvern víxlbaug k er til nákvæmlega ein fjölskylda varpa*

$$Hk_n\colon h\mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{M}_k, \qquad n \in \mathbb{Z}$$

frá samtogunarríki punktaðra rúma inn í ríki k-mótla sem uppfyllir eftirfarandi skilyrði:

Upphengieiginleiki *Fyrir sérhvert punktað rúm X er*

$$Hk_{n+1}(X \wedge S^1) \cong Hk_n(X).$$

Samlagningareiginleiki *Fyrir sérhverja fjölskyldu (X_i) punktaðra rúma er*

$$Hk_n(\bigvee_i X_i) \cong \bigoplus_i Hk_n(X_i).$$

Fleygunareiginleiki *Ef $A \longrightarrow X$ er punktuð hjátrefjun, þá er lestin*

$$Hk_n(A) \longrightarrow Hk_n(X) \longrightarrow Hk_n(X/A)$$

fleyguð.

Frumsendan um vídd *Við höfum að*

$$Hk_n(S^0) = \begin{cases} k & \textit{ef } n = 0, \\ 0 & \textit{annars.} \end{cases}$$

Slík fjölskylda kallast venjulegu svipfræðin með stuðla í k.

Tökum eftir að upphengieiginleikinn og frumsendan um vídd ásamt setningu 6 gefur okkur að

$$Hk_n(S^m) = \begin{cases} k & \text{ef } n = m, \\ 0 & \text{annars.} \end{cases}$$

Einnig höfum við að $Hk_n(*) = 0$ fyrir öll n, því fleygunareiginleikinn gefur að lestin

$$Hk_n(*) \longrightarrow Hk_n(S^0) \xrightarrow{Hk_n(\mathrm{id})} Hk_n(S^0)$$

er fleyguð og þar sem hún er einnig klofin fæst að $Hk_n(*)$ er kjarni samsemdarmótunarinnar og því 0.

Áður en lengra er haldið skulum við líta á dæmi um hversu gagnleg svipfræði geta verið með því að sanna kyrrapunktssetningu Browers. Byrjum á eftirfarandi hjálparsetningu sem segir einfaldlega að ekki er hægt að toga skinn trommu út á jaðar hennar án þess að rífa skinnið. Sönnunin er lýsandi dæmi um hvernig svipfræði geta gert erfiða spurningu í grannríkinu að einfaldri spurningu í algebruríki.

Hjálparsetning 24. *Kúluhvelið S^n er ekki inndragi D^{n+1}.*

Sönnun. Látum $i\colon S^n \subset D^{n+1}$ vera ívarpið. Ef S^n er inndragi D^{n+1}, þá er til inndráttur $r\colon D^{n+1} \longrightarrow S^n$ þannig að $ri = \mathrm{id}_{S^n}$. Nú er Hk_n varpi svo samskeytingin

$$k \cong Hk_n(S^n) \xrightarrow{Hk_n(i)} Hk_n(D^{n+1}) \xrightarrow{Hk_n(r)} Hk_n(S^n) \cong k$$

er $Hk_n(\mathrm{id}_{S^n}) = \mathrm{id}_k$. En nú er D^{n+1} samtogamóta rúminu með einungis einn punkt svo $Hk_n(D^{n+1}) \cong Hk_n(*) \cong 0$. Af því leiðir að samskeytingin hér að ofan hlýtur að vera 0-mótunin í mótsögn við að hún sé samsemdarmótunin. □

Setning 25. *(*Kyrrapunktssetning Browers*) Sérhver samfelld vörpun $f\colon D^n \longrightarrow D^n$ hefur kyrrapunkt.*

Sönnun. Ef f hefur engan kyrrapunkt, þá eru x og $f(x)$ ólíkir punktar og skilgreina því geisla út frá $f(x)$ í gegnum x sem sker S^n í punkti $r(x)$. Þetta skilgreinir inndrátt $r\colon D^{n+1} \longrightarrow S^n$ í mótsögn við hjálparsetningu 24 □

Athugasemd 26. Lesandinn kannast væntanlega vel við tilfellið $n = 1$ af kyrrapunktssetningu Browers. Það er betur þekkt sem *milligildissetningin* í stærðfræðigreiningunni.

Snúum okkur nú aftur að því að benda á þá eiginleika svipfræðanna sem við þurfum á að halda. Upphengieiginleikinn sýnir okkur að það nægir að skilgreina svipfræði á náttúrlegu tölunum, því varparnir af neikvæðu stigi ákvarðast af stigi 0. Almennar gildir að venjulegu svipfræðin má útvíkka yfir varpann Σ^∞ í varpa á stöðuga samtogunarríkinu

$$\begin{tikzcd} h\mathcal{T} \arrow[r, "Hk_n"] \arrow[d, "\Sigma^\infty"'] & \mathcal{M}_k \\ h\mathcal{S}. \arrow[ur, dashed, "Hk_n"'] & \end{tikzcd}$$

Þá höfum við að upphengiskilyrðið gildir einnig fyrir S^{-1} og öll stig svipfræðanna á stöðuga samtogunarríkinu ákvarðast af varpanum af stigi 0.

Þar sem $\mathbb{Z}$-mótullinn $\mathbb{Q}$ er flatur, þá fæst að $(\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} H\mathbb{Z}_n)$ er fjölskylda varpa sem uppfylla sömu skilyrði og $(H\mathbb{Q}_n)$ og því sama fjölskyldan. Þetta eru *ræðu* svipfræðin. Af þessu leiðir að ef við höfum reiknað $H\mathbb{Z}_n(f)$, þ.e. n-svipinn yfir heilu tölurnar af einhverri vörpun $f\colon X \longrightarrow Y$, þá höfum við jafnframt reiknað ræða n-svip hennar $H\mathbb{Q}_n(f)$.

Við ritum $Hk_n(X, A)$ í staðinn fyrir $Hk_n(C(X, A))$. Hjálparsetning 10 gefur okkur þá eftirfarandi setningu.

Setning 27 (Brottskurðareiginleiki). *Ef $U \subset A \subset X$ og $A - U \subset X - U$ og $A \subset X$ eru hjátrefjanir, þá er*

$$Hk_n(X - U, A - U) \cong Hk_n(X, A) \qquad \textit{fyrir öll } n.$$

Við þurfum á eftirfarandi hjálparsetningu að halda síðar.

Hjálparsetning 28. *Ef X er grannrúm og $x \in X$ hefur grennd sem er grannmóta $\mathbb{R}^n$, þá er*

$$Hk_n(X, X - x) \cong Hk_n(S^n).$$

Sönnun. Látum $B \subset U \cong \mathbb{R}^n$ vera grennd við x sem svarar til opins bolta um 0 í $\mathbb{R}^n$. Við höfum þá eftirfarandi mótanir

$$Hk_n(X, X - x) \longrightarrow Hk_n(X, X - B) \longleftarrow Hk_n(U, U - B) \longrightarrow Hk_n(U/(U - B))$$

þar sem fyrstu tvær eru gefnar með ívarpinu, en sú þriðja með deildavörpuninni. Þær eru allar einsmótanir. Sú fyrsta vegna þess að $C(X, X - x) \simeq C(X, X - B)$ eru samtogamóta, önnur er gefin með brottskurði, og sú síðast vegna þess að $U - B \subset U$ er hjátrefjun og því $C(U, U - B) \simeq U/(U - B)$. Að lokum er $U/(U - B) \cong S^n$. □

Einnig má sýna fram á að til eru fleygaðar lestir

$$Hk_n(A_+) \longrightarrow Hk_n(X_+) \longrightarrow Hk_n(X, A) \longrightarrow Hk_n(A_+ \wedge S^1) \cong Hk_{n-1}(A_+)$$

fyrir ópunktuð grannrúm $A \subset X$. Þetta gefur af sér langar fleygaðar lestir sem eru eitt mikilvægasta tæki okkar til þess að reikna svipi.

Svipfræði gefa einnig faldvarpa, en til þess þurfum við að líta á alla fjölskylduna sem einn varpa. Sá varpi tekur gildi í ríki *stigaðra k-mótla*. Hlutirnir eru fjölskyldur $M = (M_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ af k-mótlum og mótanirnar $f\colon M \longrightarrow N$ eru fjölskyldur af k-línulegum mótunum $f_n\colon M_n \longrightarrow N_n$.

Þinfeldi stigaðra mótla er gefið með

$$(M \otimes N)_n := \bigoplus_{i+j=n} M_i \otimes N_j.$$

Við höfum einnig einsmótun sem víxlar þáttum þinfeldis stigaðra mótla, en þá þarf að bæta inn formerkjum. Víxlreglan er þá

$$x \otimes y = (-1)^{|x||y|} y \otimes x$$

þar sem $|x|$ táknar stig x. Almennar gildir þessi formerkjaregla alltaf þegar tveimur stiguðum stærðum er víxlað.

Setning 29. *Venjulegu svipfræðin (Hk_n) gefa faldvarpa Hk frá punktaða samtogunarríkinu inn í ríki stigaðra k-mótla. Faldmynstrið á samtogunarríkinu er gefið með sláfeldinu en á ríki stigaðra k-mótla með þinfeldinu. Ef k er svið, þá er þetta sterkur faldvarpi.*

Hinar almennu skilgreiningar í §5 segja okkur hvernig við eigum að skilgreina spor sjálfmótana $f\colon M \longrightarrow M$ í ríki stigaðra k-mótla. Við alhæfum nú niðurstöður úr §2 til að gefa formúlu fyrir sporið þegar við vinnum yfir svið.

Setning 30. *Látum V vera stigað k-vigurrúm. Þá er V nykranlegt þá og því aðeins að sérhvert V_n sé endanlega vítt og aðeins endanlega mörg frábrugðin núllrúminu. Ef V er nykranlegt og f er sjálfmótun á V, þá er*

$$\chi(f) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (-1)^n \chi(f_n).$$

Sönnun. Við skilgreinum nykurrúm V sem stigaða vigurrúmið V^* með $(V^*)_n = \hom(V_{-n}, k)$. Við getum þá skilgreint

$$\nu(f \otimes w)(v) = (-1)^{|v||w|} f(v)w$$

og fáum líkt og í setningu 1 að þetta er einsmótun þá og því aðeins að sérhvert vigurrúm V_n sé endanlega vítt og aðeins endanlega mörg frábrugðin núllrúminu. Við skilgreinum η og ϵ eins og í §2 og líkt og í athugasemdum 2 og 4 má sjá að stigaða vigurrúmið V er nykranlegt þá og því aðeins að ν sé einsmótun. Ef $(v_{n,i})_i$ er grunnur fyrir V_n, þá er

$$\eta(1) = \sum_{n,i} v_{n,i} \otimes v^*_{n,i}$$

því $\nu\tau$ varpar þessari summu á samsemdarvörpunina.

Nú getum við hugsað um k sem stigað vigurrúm sem liggur alfarið í stigi 0. Mynd η liggur því alfarið í stigi núll, eða í hlutrúminu

$$\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} V_n \otimes (V^*)_{-n} = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} V_n \otimes (V_n)^*$$

Á þessu hlutrúmi er τ í stigi n gefin með

$$\tau_n(v \otimes f) = (-1)^n f \otimes v$$

því $(-1)^{n^2} = (-1)^n$ fyrir öll n. Það er nú auðséð að sporið $\chi(f)$ er gefið með víxlsummu sporanna $\chi(f_n)$. $\square$

7. Kyrrapunktssetning Hopf-Lefschetz

Í þessum hluta setjum við loksins fram og sönnum kyrrapunktssetningu Hopf-Lefschetz. En áður en við vindum okkur í sönnun setningarinnar þurfum við að skilgreina kyrrapunktsvísi Lefschetz. Til einföldunar ritum við H fyrir svipfræðin $H\mathbb{Z}$ með stuðla í heilu tölunum.

Látum $f\colon S^n \longrightarrow S^n$ vera sjálfmótun S^n, sem þarf ekki að varðveita grunnpunktinn. Við notum hjálparsetningu 28 til þess að skilgreina mótunina

$$\deg(f)\colon\ H_n(S^n) \cong H_n(S^n, S^n - *) \xrightarrow{H_n(f)} H_n(S^n, S^n - f(*)) \cong H_n(S^n)$$

sem kallast *stig* f. Þar sem $H_n(S^n) = \mathbb{Z}$ þá ákvarðast stigið ótvírætt af tölunni $\deg(f)(1)$ sem við köllum oft einnig stig f. Ef f varðveitir grunnpunkt S^n, þá er þetta sama mótunin og $H_n(f)$.

Ef $V \subset \mathbb{R}^n$ er opið, $f\colon V \longrightarrow S^n$ er samfelld og $f^{-1}(x) \subset V$ er þjappað, þá skilgreinum við *staðbundið stig* f í punktinum x með eftirfarandi örvariti

$$\begin{tikzcd}
H_n(S^n) \arrow[rr] \arrow[d, "\deg_x(f)"'] & & H_n(S^n, S^n - f^{-1}(x)) \\
H_n(S^n) & H_n(S^n, S^n - x) \arrow[l, "\cong"'] & H_n(V, V - f^{-1}(x)) \arrow[l, "H_n(f)"'] \arrow[u, "\cong"']
\end{tikzcd}$$

þar sem ómerktu mótanirnar eru gefnar með ívörpum eða deildavörpunum. Lóðrétta einsmótunin fæst með brottskurðareiginleika svipfræðanna. Tökum eftir að ef f gefur greypingu á V sem hlutrúm í S^n, þá eru allar mótanirnar í örvaritinu einsmótanir og því sömuleiðis $\deg_x(f)$. En þá er nauðsynlega $\deg_x(f) = \pm 1$ því það eru einu einsmótanirnar á $H_n(S^n) = \mathbb{Z}$.

Setning 31. *Látum $f\colon S^n \longrightarrow S^n$ vera sjálfmótun S^n og $V_i \subset S^n$ vera opin þannig að $F_i = V_i \cap f^{-1}(x)$ séu sundurlæg tvö og tvö. Látum f_i vera einskorðun f við V_i. Þá er*

$$\deg(f) = \sum \deg_x(f_i).$$

Við eftirlátum lesandanum sönnunina en tökum eftir eftirfarandi afleiðingum. Ef við tökum bara eitt opið mengi $V_0 = S^n$, þá er $\deg(f) = \deg_x(f)$ fyrir sérhvert $x \in S^n$. Einnig sjáum við að ef $f^{-1}(x)$ er strjált mengi, þá getum við valið opnu mengin V_i þannig að þau innihaldi einungis einn punkt úr $f^{-1}(x)$. Við túlkum summuna þá sem fjölda punkta $f^{-1}(x)$ þar sem þeir eru taldir með *margfeldninni* $\deg_x(f_i)$. Ef f_i er greyping, þá er margfeldnin ± 1.

Við notum nú stig sjálfmótana á S^n til þess að telja kyrrapunkta.

Skilgreining 32. Látum $i\colon V \subset \mathbb{R}^n$ vera ívarp opins hlutrúms og $f\colon V \longrightarrow \mathbb{R}^n$ vera vörpun. Gerum ráð fyrir að hlutrúm kyrrapunkta f

$$K_f := \{x \in V \mid f(x) = x\} = (f-i)^{-1}(0),$$

sé þjappað í V. Þá er

$$I_f := \deg_0(f-i)$$

kyrrapunktsvísir Lefschetz.

Í skilgreiningunni á I_f hugsum við um $f-i$ sem vörpun inn í S^n, sem er eins-punkts þjöppun $\mathbb{R}^n$. Það má sýna fram á að ef $g\colon V \longrightarrow \mathbb{R}^n$ er samtoga vörpuninni f í skilgreiningunni hér að ofan, þannig að samtogunin hafi þjappað hlutrúm kyrrapunkta, þá er $I_f = I_g$. Við getum því einnig skilgreint kyrrapunktsvísa fyrir margar sjálfmótanir $f\colon X \longrightarrow X$ þjappaðra hlutmengja X í $\mathbb{R}^n$. Ef $j\colon X \subset \mathbb{R}^n$ er hjátrefjun með inndrátt $r\colon U \longrightarrow X$, þá setjum við $I_f := I_g$ þar sem $g = jfr$.

Við getum nú loksins sannað eftirfarandi setningu.

Setning 33. *(*Kyrrapunktssetning Hopf-Lefschetz*) Látum $X \subset \mathbb{R}^n$ vera hjátrefjun þar sem X er þjappað og $f\colon X \longrightarrow X$ vera sjálfmótun X. Þá er*

$$I_f = H\mathbb{Q}(\chi(f_+)) = \chi(H\mathbb{Q}(f_+)) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (-1)^n \chi(H\mathbb{Q}_n(f_+)).$$

Sönnun. Annað jafnaðarmerkið leiðir af setningu 22 og það þriðja af setningu 30. Eftir er að sýna fram á það fyrsta. Spor f_+ er gefið með samskeytingunni

$$S^n \xrightarrow{\eta} X_+ \wedge C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - X) \xrightarrow{\tau} C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - X) \wedge X_+ \xrightarrow{\mathrm{id}\wedge f_+} C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - X) \wedge X_+ \xrightarrow{\epsilon} S^n.$$

Látum U vera grenndarinndraga við X með inndrátt $r\colon U \longrightarrow X$ og látum $j\colon X \subset \mathbb{R}^n$ og $i\colon U \subset \mathbb{R}^n$ vera ívörpin. Við setjum $g := jfr$. Ef við setjum inn skilgreininguna á vörpununum η og ϵ inn í samskeytinguna hér að ofan fáum við örvaritið

$$\begin{tikzcd}
S^n \arrow[d, "\chi(f)"'] & C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - B) \arrow[l, "\simeq"'] \arrow[r] & C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - X) & C(U, U - X) \arrow[l, "\simeq"'] \arrow[d, "C\Delta"] \arrow[ddl, "C(g-i)"'] \\
 & & & C(U \times \mathbb{R}^n, U \times (\mathbb{R}^n - X)) \arrow[d, "C(fr\times 1)"] \\
S^n & C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - B) \arrow[l, "\simeq"'] \arrow[r] & C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - 0) & C(X \times \mathbb{R}^n, X \times (\mathbb{R}^n - X)). \arrow[l, "C(d)"]
\end{tikzcd}$$

Það er augljós vörpun frá þessu örvariti inn í örvaritið

$$\begin{tikzcd}
S^n \arrow[d, "\deg_0(g-i)"'] & C(S^n, S^n - B) \arrow[l, "\simeq"'] \arrow[r] & C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - F) & C(U, U - F) \arrow[l, "\simeq"] \arrow[dl, "C(g-i)"'] \\
S^n & C(S^n, S^n - B) \arrow[l, "\simeq"'] \arrow[r] & C(S^n, S^n - 0) &
\end{tikzcd}$$

þar sem $F = (g - i)^{-1}(0)$ sem sýnir að $H_n(\chi(f)) = I_g = I_f$. $\square$

Áhugavert sértilfelli þessarar setningar er þegar f er samsemdarvörpunin. Þá er kyrrapunktsvísirinn kallaður *kennitala Eulers* og við höfum að

$$\chi(X) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n \dim_{\mathbb{Q}} H\mathbb{Q}_n(X_+).$$

Svo framarlega sem X sé nykranlegt grannrúm, þá er summan endanleg og þetta því vel skilgreind tala.

Þeir sem þekkja hvernig skilgreina má venjulegu svipfræðin á þynnurúmum geta auðveldlega séð að

$$\chi(X) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n \dim_{\mathbb{Q}} H\mathbb{Q}_n(X_+) = \sum_{n \in \mathbb{N}} (-1)^n c_n$$

þar sem c_n er fjöldi þynna af vídd n í þynnurúminu. Þetta gildir óháð framsetningu þynnurúmsins. Þannig má til dæmis reikna að:

- $\chi(S^1) = 1 - 1 = 0$ vegna þess að hringinn má setja fram sem þynnurúm með því að líma jaðar 1-þynnu við 0-þynnu.
- $\chi(S^2) = 1 - 0 + 1 = 2$ vegna þess að kúluhvelið má setja fram sem þynnurúm með því að líma jaðar 2-þynnu við 0-þynnu.
- $\chi(S^1 \times S^1) = 1 - 2 + 1 = 0$ vegna þess að $S^1 \times S^1$ er yfirborð kleinuhrings sem má setja fram sem þynnurúm með einni 0-þynnu, tveimur 1-þynnum og einni 2-þynnu.

Lesandinn ætti að prófa að reikna kennitölu Eulers fyrir mismunandi framsetningar á þessum rúmum sem þynnurúm. Hann getur einnig spreytt sig á því að finna tvívíða lokaða víðáttu með kennitölu n fyrir sérhvert $n \in \mathbb{Z}, n \leq 2$.

8. Í átt að nauðsynlegu skilyrði

Í þessum hluta munum við gefa nokkrar vísbendingar um hvernig styrkja megi kyrrapunktssetninguna þannig að hún gefi ekki einungis nægjanlegt skilyrði fyrir tilvist kyrrapunkta, heldur einnig nauðsynlegt. Við skulum halda okkur við tilfellið þegar M er lokuð þjál víðátta og $f\colon M \longrightarrow M$ er sjálfmótun á M.

Kyrrapunktsrúmi f má lýsa með örvaritinu

$$K_f \xrightarrow{i} M \underset{\mathrm{id}}{\overset{f}{\rightrightarrows}} M. \tag{1}$$

Hér er K_f hlutrúm allra punkta í M sem hafa sama gildi m.t.t. f og id. Ef sjálfmótuninni f er breytt innan samtogunarflokks síns, þá má eðlilega búast við að kyrrapunktarnir færist til, en einnig má vel ímynda sér að þeir aðgreinist eða renni saman.

Dæmi 34. Látum $M = S^1 \subset \mathbb{C}$ og f vera samsemdarvörpunina. Þá eru allir punktar kyrrapunktar. Ef við hinsvegar „snúum“ f örlítið, tökum til dæmis vörpunina $z \mapsto uz$ þar sem $u \in S^1 - \{1\}$, þá hverfa allir kyrrapunktarnir. Enda sáum við í lok §7 að $\chi(S^1) = 0$.

Ef við hinsvegar látum f vera samokun tvinntalnanna $z \mapsto \bar{z}$, þá eru nákvæmlega tveir kyrrapunktar, ± 1. Hinsvegar má toga f til í kringum 1 þannig að vörpunin hlykkist fram og til baka í grennd um 1 og það er auðvelt að sannafæra sig um að þá hljóti kyrrapunktunum að fjölga. En margfeldni þessara nýju kyrrapunkta hlýtur samanlagt að vera sú sama og margfeldni upprunalega kyrrapunktsins 1. Í fljótu bragði lítur því út fyrir að kyrrapunktar sjálfmótunar $f\colon S^1 \longrightarrow S^1$ sem er samtoga samokun tvinntalnanna skiptist í tvo flokka. Annarsvegar þá sem renna saman við 1 og hinsvegar þá sem renna saman við -1.

Við skilgreinum jafngildisvensl á K_f með því að setja $x \sim y$ ef til er vegur $u\colon x \longrightarrow y$ frá x til y þannig að $fu\colon x \longrightarrow y$ sé vegsamtoga u. Það þýðir að til sé samtogun frá fu til u sem heldur endapunktum veganna föstum. Jafngildisflokkarnir gefa deildaskiptingu á K_f og við köllum deildirnar *kyrrapunktsflokka* f. Fyrir sérhvern kyrrapunktsflokk K_i látum við $I_i(f) := I_{f|K_i}$ vera kyrrapunktsvísi Lefschetz fyrir $f|K_i$. Að lokum látum við $N(f)$, *kyrrapunktsvísi Nielsen*, vera fjölda þeirra kyrrapunktsvísa I_i sem eru ekki 0.

Setning 35. *Látum M vera þjappaða þjála víðátta af vídd að minnsta kosti 3. Ef $f\colon M \longrightarrow M$ er sjálfmótun, þá er f samtoga sjálfmótun með enga kyrrapunkta þá og því aðeins að $N(f) = 0$.*

Athugasemd 36. Reyndar ættum við frekar að skoða *kyrrapunktsvísi Reidemeister* en hann er eðlilegri alhæfing á kyrrapunktsvísi Lefschetz og inniheldur meiri upplýsingar en kyrrapunktsvísir Nielsen. Það er hinsvegar ögn flóknara að skilgreina hann svo við látum það vera.

Við reynum nú að lýsa því hvernig bera megi sig að við að sanna þessa setningu með því að nota sömu hugmyndafræði og í fyrri hlutum þessarar greinar. Með öðrum orðum, þá erum við á höttunum eftir faldvarpa frá einhverju grannríki inn í eitthvert algebruríki þannig að sporin endurspegli skiptingu K_f í kyrrapunktsflokka og þar með kyrrapunktsvísi Nielsen.

Skipting K_f í kyrrapunktsflokka sést ekki í (1) og við skulum bæta úr því.

Smið 37. Látum PM vera rúm allra vega $u\colon [0,1] \longrightarrow M$ í M. Síðan skulum við láta

$$\Pi M := PM/\sim$$

vera deildarúmið þar sem við samsömum tvo vegi ef þeir eru vegsamtoga. Við aukum okkur leti og köllum stök ΠM áfram vegi, í stað vegsamtogunarflokk vega. Við höfum nú samfelldar varpanir

$$\begin{tikzcd} \Pi M \arrow[r, shift left, "s"] \arrow[r, shift right, "t"'] & M \end{tikzcd}$$

sem eru gefnar með $s(u) = u(0)$ og $t(u) = u(1)$. Hér gefur s upphafspunkt vegarins, en t gefur endapunkt hans. Ef upphafs- og endapunktur tveggja vega v og u er sá sami, þ.e.a.s. $s(v) = t(u)$, þá getum við skeytt þeim saman í veginn $vu\colon u(0) \longrightarrow v(1)$ sem er gefinn með því að fara fyrst eftir u (á tvöföldum hraða) og svo eftir v (einnig á tvöföldum hraða). Þessi samskeyting er gefin með samfelldri vörpun

$$\Pi M \,{}^{s}\!\times^{t}_{M} \Pi M \longrightarrow \Pi M$$

þar sem forhlutur vörpunarinnar er trefjumargfeldið af öllum tvenndum (v, u) af samskeytanlegum vegum. Að lokum er augljós vörpun $id\colon M \longrightarrow \Pi M$ sem sendir x á flokk fastavegarins í punktinum x. Með þessum vörpunum höfum við gert $(\Pi M, M)$ að *ríkishlut* í ríki grannrúma. Með því að snúa vegum við (fara frá endapunkti til upphafspunkts) fáum við andhverfur fyrir samskeytinguna svo allar mótanir þessa ríkishlutar eru andhverfanlegar. Við höfum því skilgreint grýpi í ríki grannrúma sem er auðguð útgáfa af undirstöðugrýpinu í dæmi 13(5).

Við getum nú alhæft auðkenninguna á K_f í (1) með örvaritinu

$$\begin{tikzcd} K_{\Pi f} \arrow[r, "i"] \arrow[d, shift right, "s"'] \arrow[d, shift left, "t"] & \Pi M \arrow[r, shift left, "\Pi f"] \arrow[r, shift right, "\mathrm{id}"'] \arrow[d, shift right, "s"'] \arrow[d, shift left, "t"] & \Pi M \arrow[d, shift right, "s"'] \arrow[d, shift left, "t"] \\ K_f \arrow[r, "i"] & M \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "\mathrm{id}"'] & M. \end{tikzcd} \tag{2}$$

Hér gefur $(\Pi f, f)$ varpa, þar sem $(\Pi f)(u) = fu$, og $K_{\Pi f}$ er rúm allra (vegsamtogunarflokka) vega $u\colon x \longrightarrow y$ milli kyrrapunkta þannig að $fu\colon x \longrightarrow y$ sé vegsamtoga u. Auðséð er að $(K_{\Pi f}, K_f)$ er ríkishlutur í ríki grannrúma. Tveir kyrrapunktar eru tengdir með mótun í $K_{\Pi f}$ þá og því aðeins að þeir séu í sama kyrrapunktsflokknum.

Nú er hugmyndin sú að í stað M þá ættum við að skoða undirstöðugrýpi M og í stað f þá ættum við að skoða varpann $(\Pi f, f)$. En við þurfum að finna eðlilegt vinnuumhverfi til að rannsaka þessa hluti. Við þurfum að finna rétta ríkið! Slæmu fréttirnar eru þær að heppilegt ríki er ekki til. Góðu fréttirnar eru hinsvegar að til er heppilegt *tvíríki*. En hvað er tvíríki? Rétt eins og ríki þá hefa tvíríki hluti og mótanir, en það hefur einnig mótanir á milli mótana sem kallast 2-mótanir. Við skulum láta formlega skilgreiningu eiga sig, en þess í stað skulum við líta á nokkur dæmi sem ættu að gefa nokkuð góða tilfinningu fyrir tvíríkjum.

Dæmi 38. Nokkur dæmi um tvíríki.

1. Látum X vera grannrúm. Þá getum við skilgreint tvíríki með því að láta hlutina vera punkta X, 1-mótanirnar vera vegi $u\colon x \longrightarrow y$ og 2-mótanirnar vera samtogunarflokka vegsamtogana $\alpha\colon u \Longrightarrow v$ milli vega.
2. Tvíríki tvímótla hefur (ekki endilega víxlna) bauga fyrir hluti og 1-mótanirnar $M\colon R \longrightarrow S$ eru (R, S)-tvímótlar, en það eru mótlar M þar sem R verkar frá vinstri og S frá hægri á samkvæman hátt. Að lokum eru 2-mótanirnar milli 1-mótana $R \longrightarrow S$ línulegar mótanir (R, S)-tvímótla.
3. Tvíríki n-jaðra hefur lokaðar n-víðáttur fyrir hluti og 1-mótanirnar $B\colon M \longrightarrow N$ eru þjappaðar $(n+1)$-víðáttur B þannig að jaðar B sé $M \amalg N$. Að lokum eru 2-mótanirnar milli 1-mótana $M \longrightarrow N$ varpanir milli $(n+1)$-víðátta sem halda jaðrinum föstum.
4. Tvíríki stikaðra grannrúma hefur grannrúm fyrir hluti, 1-mótanir $X\colon A \longrightarrow B$ eru stikuð grannrúm X yfir $A \times B$, þ.e. varpanir $X \longrightarrow A \times B$, og 2-mótanir milli 1-mótana $A \longrightarrow B$ eru stikaðar varpanir milli stikaðra grannrúma yfir $A \times B$, þ.e. samfelldar varpanir yfir $A \times B$.
5. Tvíríki verkana hefur grúpur fyrir hluti, 1-mótanir $X\colon G \longrightarrow H$ eru mengi með vinstri G-verkun og samkvæma hægri H-verkun, en 2-mótanirnar milli 1-mótana $G \longrightarrow H$ eru jafnvirkar varpanir, þ.e. varpanir sem varðveita grúpuverkanirnar.

Þannig mætti lengi telja. Reyndar er enn meira mynstur á flestum þessum dæmum, nefnilega eðlilegar mótanir milli hlutanna sem ekki var getið hér að ofan, eins og baugamótunum milli bauga í öðru dæminu. Flest þessara tvíríkja eru nefnilega hluti af *tvöföldum ríkjum*, sem eru ríkishlutir í ríki ríkja. En við skulum ekki hætta okkur út í þá sálma.

Við sáum í dæmi 13(4) að földungur er það sama og ríki með aðeins einn hlut. Á svipaðan hátt er faldríki einfaldlega tvíríki með aðeins einn hlut, þar sem faldmynstrið er samskeyting 1-mótananna. Tvíríkin eru því náttúrlegar alhæfingar á faldríkjunum. Skilgreiningu okkar á nykrum hluta í faldríkjum er hægt að alhæfa og skilgreina nykra 1-mótana í tvíríkjum. Þetta var gert í [5, kafla 16].

Fyrsta skrefið í þá átt að finna heppilegt tvíríki til þess að rannsaka varpana í (2) er að líta á *stikaða rúmið* $(\Pi M, t)$. Við hugsum um M sem stika fyrir trefjur t. Við getum þá dregið þetta stikaða rúm aftur eftir f og fáum stikaða rúmið

$$f^*(\Pi M, t) = \{(u, x) \in \Pi M \times M \mid u(1) = f(x)\}$$

með ofanvarp sem sendir (u, x) á x. Vörpunin Πf gefur nú af sér stikaða vörpun

$$\Pi f\colon (\Pi M, t) \longrightarrow f^*(\Pi M, t)$$

sem sendir u á $(f(u), u(1))$. Þessa stikuðu vörpun má líta á sem 2-mótun í tvíríki stikaðra rúma.

Samtogunarfræði stikaðra rúma var aðal viðfangsefni [5] og þar var tvíríki stikaðra rúma kynnt til sögunnar. Reyndar borgar sig að vinna með stikuð rúm með *snið*, en snið fyrir stikað rúm (E, p) yfir B er vörpun $s\colon B \longrightarrow E$ þannig að $ps = \mathrm{id}_B$. Sniðið gefur hverri trefju grunnpunkt og því má hugsa um stikuð rúm með snið sem stikuð punktuð grannrúm.

Dæmi 39. Hér eru tvö dæmi um stikuð grannrúm.

1. Með ofanvarpinu á seinni þáttinn er $S^0_M := S^0 \times M$ stikað rúm yfir M. Sniðið er gefið með $s(m) = (*, m)$.
2. Minnumst frá upphafi §4 að ef M er þjál víðátta, þá hefur hún þverlabundin ν með tilliti til einhverrar greypingar í evklíðskt rúm. Þetta þverlabundin er stikað rúm yfir M og trefjur ν eru vigurrúm. Við þjöppum sérhverja trefju með því að bæta við punkti í óendanlegu og fáum stikað rúm S^ν þar sem trefjurnar eru kúluhvel. Þjöppunarpunktarnir gefa S^ν snið.

Eftirfarandi alhæfingu á setningu 8 er [5, setning 18.6.1].

Setning 40. *Í (samtogunar-) tvíríki stikaðra rúma með snið er $S^0_M : M \longrightarrow *$ nykranleg 1-mótun með hægri n-nykur $S^\nu : * \longrightarrow M$.*

Af þessari setningu og aðferðum sem voru þróaðar í [5] má svo leiða að $(\Pi M, t)$ er nykranlegur hlutur í viðeigandi tvíríki. En við skulum ekki hætta okkur lengra í smáatriðunum hér. Áður en við ljúkum þessari umfjöllun er þó rétt að benda á að ekki er með öllu ljóst hvernig skilgreina á spor í tvíríkjum. Víxlmótunin τ sem við notuðum í skilgreiningunni fyrir faldríki er nefnilega til vandræða. Til þess að skýra þetta, skulum við taka eftir að ef við höfum samskeytingu

$$N \odot M : A \longrightarrow B$$

tveggja 1-mótana $M : A \longrightarrow B$ og $N : B \longrightarrow C$, þá hefur það enga merkingu að ætla að víxla M og N og rita $M \odot N$ nema $A = C$. Þar sem faldríki er tvíríki með einn hlut, þá er þetta aldrei til trafala þar, en þetta setur strik í reikninginn þegar kemur að því að alhæfa skilgreiningu spora frá faldríkjum til tvíríkja. Lausnin á þessum vanda var fundin í [3] þar sem einnig má finna sönnun á setningu 35.

References

[1] Albrecht Dold and Dieter Puppe, *Duality, trace, and transfer*, (Warsaw, 1978), PWN, Warsaw, 1980, pp. 81–102.
[2] John Klein and E. Bruce Williams, *Homotopical intersection theory I*, arxiv:math/0512479.
[3] Kate Ponto, *Fixed point theory and trace for bicategories*, PhD dissertation, University of Chicago (2007).
[4] Saunders Mac Lane, *Categories for the working mathematician*, 2nd ed. Graduate Texts in Mathematics, vol. 5, Springer-Verlag, New York, 1998.
[5] J. P. May and J. Sigurdsson, *Parametrized homotopy theory*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 132, American Mathematical Society, Providence, RI, 2006.

Summary: The fixed point theorem of Hopf-Lefschetz gives a sufficient condition for the existence of fixed points for endomorphisms of certain topological spaces. We review a proof of this theorem that is largely formal and depends on the notions of dual objects and trace maps in monoidal categories and the fact that strong monoidal functors preserve traces. We then hint at how these notions could be generalized in order to get a necessary condition for the existence of fixed points.

Um höfundinn: Jóhann Sigurðsson er fæddur árið 1975. Hann lauk BS prófi í stærðfræði frá Háskóla Íslands 1997 og doktorsprófi í stærðfræði frá Chicago háskóla árið 2004. Eftir það starfaði hann við Nortre Dame háskólann í Bandaríkjunum og háskólann í Sheffield á Englandi. Frá 2008 hefur Jóhann svo verið sérfræðingur á Raunvísindastofnun Háskólans.

Jóhann Sigurðsson
Raunvísindastofnun Háskólans
Dunhaga 3, 107 Reykjavík
jsigurds@hi.is
Móttekin: 27. maí 2007