Tímarit um raunvísindi og stærðfræði
4. árg. 1. hefti 2007 – raust.is/2007/1/01

Vængjaþytur stærðfræðinnar

Ingólfur Gíslason

Ránargötu 45, 101 Reykjavík

Vefútgáfa: 19. mars 2007

Ágrip – Þessi grein skýrir frá nýjum hugmyndum í heimspeki stærðfræðinnar. Sér í lagi er litið á það hvernig það gefur merkingu að líta á stærðfræði sem félagslega smíð. Formleg framsetning nær ekki utan um allt sem fram fer innan stærðfræðinnar, og formhyggja getur ekki svarað mörgum mikilvægum spurningum um stærðfræði, til dæmis: til hvers er stærðfræði, af hverju er hún áhugaverð? Ennfremur, þar sem mörg stærðfræðileg hugtök, eins og „óendanleiki“, svara ekki til þekktra hluta í náttúrunni, og hugtök þróast, sem og rannsóknaraðferðir og kröfur til sannanna, þá er spurt hvort gagnlegra geti verið að líta á stærðfræðileg hugtök sem félagslegar smíðar, frekar en platónskar frummyndir eða ævarandi sannleika.

Hefðbundin heimspeki stærðfræðinnar fjallar um stærðfræði sem fyrirfram gefna. Hún hefur leitast við að finna undirstöður stærðfræðinnar, hvernig sanna megi að hún hvíli á fullkomlega traustum grunni, og svara því í hverju tilvist stærðfræðilegra hugtaka felist. Á senni árum hafa vaknað heimspekilegar spurningar af öðru tagi, meðal annars sprottnar af þeirri tilfinningu að hinar eldri kenningar segi ekki svo mikið um það hvernig stærðfræði er iðkuð í raun og veru, hvernig hún þróast með tíma og í samskiptum stærðfræðinga. Er stærðfræði óbreytanleg og örugg sannindi? Gæti hún verið einhvern veginn öðruvísi en hún er, en samt leikið svipað hlutverk og hún gerir? Hvernig eru rannsóknar- og framsetningaraðferðir hennar frábrugðnar öðrum greinum? Hvernig spurningar um stærðfræði eru gagnlegar og frjóar? Var heimspeki stærðfræðinnar einfaldlega afgreidd í upphafi 20. aldar? Það sem á eftir fer er kannski meira í ætt við hugleiðingar um þessar spurningar heldur en mjög skipuleg tilraun til að svara þeim eða gera nákvæma grein fyrir því hvernig einhverjir aðrir hafa svarað þeim.

Stærðfræði sem alheimstungumál

Það hefur lengi verið skoðun margra að stærðfræði sé einhverskonar alheimstungumál; ef vitrænt líf leynist einhversstaðar í alheiminum, sem auk þess er fært um að taka á móti og mæla rafsegulbylgjur, hljóti þær verur að kunna stærðfræði - og þeirra stærðfræði hljóti að vera sú sama og okkar stærðfræði í öllum aðalatriðum, einsmóta okkar fræðum. Hollenski stærðfræðingurinn (og stærðfræðimenntunarfrömuðurinn) Hans Freudenthal setti saman heilt tungumál, sérstaklega ætlað til samskipta milli heima, Lingua Cosmica og gaf út kennslubók í því árið 1960.

> Fyrst kenndum við geimverunum hvernig við táknum tölur, svo reikniaðgerðir, algebru, hnitarúmfræði, diffurreikning og svo framvegis, allt að jöfnum nútíma eðlisfræði, og að lokum, í ljósi stöðu eðlisfræðinnar sem grundvallarvísinda, öll vísindi og þar með alla mannlega þekkingu. (Rotman, bls. 120, [13])

Fleiri hafa velt fyrir sér milliheimafjarskiptum og stærðfræðin kemur þar yfirleitt fljótt upp enda er almennt álitið að engin grein þekkingar sé jafn örugg, algild og óháð aðstæðum eða samhengi. Margir eðlisfræðingar ganga meira að segja „lengra“ og telja grundvöll samskipta geta verið að finna í lögmálum eðlisfræðinnar. Steven Weinberg segir:

> Ef við finnum einhverntíma vitsmunalíf á einhverri fjarlægri reikistjörnu og þýðum vísindarit þeirra, þá munum við komast að því, að við og þau höfum uppgötvað sömu lögmálin. (Hacking, bls. 75, [4])

Enn höfum við að vísu ekkert heyrt frá geimverunum. Kannski eiga þær jafn erfitt með að tileinka sér stærðfræði og venjulegir jarðneskir skólanemendur. En þó að þær væru jafnvel enn gáfaðri en Steven Weinberg, verða fyrir nokkur heimspekileg vandamál við hugsanleg samskipti af þessu tagi:

- Þýðingarvandi: hvernig vitum við hvort eitthvert geimverumál tjái lögmál eðlisfræðinnar? Jú, eingöngu ef við getum þýtt það yfir á eitthvað sem líkist okkar eðlisfræði. Við höldum að við höfum þýtt málið ef við fáum eitthvað út sem líkist okkar eðlisfræði. (Og hefðum gert það þannig sama hvernig sem okkar eðlisfræði væri.)
- Hvaða ástæður höfum við til að ætla að stærðfræði (eða eðlisfræði) sé ekki einmitt mótuð af því að við erum manneskjur og manneskjur séu eins og þær eru vegna sérstaks umhverfis, uppruna og þróunar, bæði líffræðilega og félagslega?

Þessi seinni spurning hverfist um þá gömlu spurningu hvort stærðfræði sé uppgötvuð eða fundin upp. Hvert svar fyrir sig má greina nánar niður og öll venjuleg svör leiða til einhverra heimspekilegra vandkvæða. Gróflega má kannski spyrja:

- Ef hún er uppgötvuð, um hvað er hún þá og hvaðan er hún uppgötvuð? Er hún innan í okkur eða fyrir utan? Og þá hvar?
- Ef hún er fundin upp, hvernig getur hún þá verið svona gagnleg og sannfærandi, hvers vegna eru stærðfræðireglur svona óhagganlegar?

Nú eru til þrjár sígildar skoðanir á eðli stærðfræðinnar, raunhyggja (sér í lagi platónismi), innsæishyggja og formhyggja og verður litið á þær síðar, ásamt því sem ég velti fyrir mér tilraunum til þess að komast út fyrir þessi þrjú sjónarhorn, einkum með það fyrir augum að kanna hvort beita megi hugmyndum um félagslega smíðhyggju á stærðfræði, og að hvaða leyti það varpar ljósi á þessar spurningar hér að ofan.

Félagsleg smíðhyggja

Margt sem við köllum raunverulegt er ekki efnislegt. Peningar, lög og reglur og B.A. gráður eru ekki til vegna neinna efnislegra hluta; þetta eru einföld dæmi um hluti sem eru augljóslega einungis til vegna mannlegs samfélags af ákveðnu tagi og í samhengi við það. Annað er óljósara og um sumt standa deilur. Gott dæmi um það er kynferði: að hve miklu leyti er *kona* tilbúið hugtak sem hefur orðið til sögulega í félagslegum veruleika? Eða er þetta eingöngu spurning um æxlunarfæri? Erfiðast hefur mönnum þó þótt að kyngja því þegar eitthvað sem virðist óvefengjanleg vísindaleg (hvað þá stærðfræðileg) staðreynd er nefnt félagsleg smíð (sumir nota orðið hugsmíð).

Ef við fylgjum nú umfjöllun Ian Hacking [4] í bókinni *The Social Construction of What?* segir hann að mikilvægt sé að átta sig á tilgangi þess þegar einhver talar um félagslega smíð: að vekja fólk til vitundar um að heimurinn sé ekki allur þar sem hann er séður og að margt gæti verið með öðrum hætti en raunverulega er. Þannig sé félagsleg smíðhyggja tæki til að gagnrýna ríkjandi ástand mála. Hacking telur nokkur skilyrði vera fyrir því að vit sé í að halda því fram að X sé félagsleg smíð:

1. X þyrfti ekki að vera til, eða gæti verið allt öðruvísi en nú er. X, eða X eins og það er í dag ákvarðast ekki af gerð heimsins og var ekki óumflýjanlegt.

Hann segir að mjög margir smíðhyggjusinnar bæti við skoðunum eins og

2. X er mjög slæmt eins og er.
3. Við yrðum mun betur sett ef við útrýmdum eða gjörbreyttum X. (Hacking, bls. 6, [4])

Auk þess tekur því varla að fara að tala um að X sé félagsleg smíð nema að

0. Eins og er þá gerum við bara ráð fyrir að X sé eins og það er, og geti ekki verið á annan hátt.

Rétt er að benda á að þegar talað er um að til dæmis kynferði sé félagsleg smíð, þá er ekki átt við að Hildur vinkona mín sé ekki til sem efnisleg lífvera, heldur að „kvenleiki“ hennar, ætlaðir kvenlegir eiginleikar, séu ekki afleiðingar líffræðilegrar gerðar hennar, heldur félagslega mótaðir. Fræg eru orð Simone De Beauvoir „maður fæðist ekki kona, heldur verður kona.“ (Hacking, bls. 7, [4])

En er ástæða til þess að tala um að stærðfræðihugtök, náttúrulögmál, eða hlutir eins og rafeindir og kvarkar, séu félagslegar smíðar? Ekki eru menn á því að stærðfræði sé slæm í sjálfri sér og henni ætti að breyta? Það má nefna tvær ástæður. Önnur þeirra er skyld atriði 2 hér að ofan og mætti lýsa henni sem svo að full ástæða sé til að afhelga stærðfræði, það er að segja að leiða í ljós hvernig hún er notuð til valdbeitingar eða stjórnunar og vekja fólk til vitundar um að aðrar leiðir til að skilja og fjalla um veruleikann eru alveg jafn réttháar. Þetta mundi Hacking kalla (eftir Karl Mannheim) að afhjúpa aukaverkun

(e. the extra-theoretical function) stærðfræðinnar (eða einhvers hluta hennar). Hin ástæðan er sú að hin hefðbundna heimspekilega greining á eðli stærðfræðinnar hefur reynst ófullnægjandi. Áður en þeirri greiningu verður lýst skulum við setja niður verkefni félagslegrar smíðhyggju um stærðfræði (og eðlisfræði):

Gæti stærðfræði (og eðlisfræði) verið einhvern veginn öðruvísi en hún er? Hér er auðvitað átt við djúpstæðan meiriháttar mun, ekki bara að hún gæti verið skemur eða lengra á veg komin, eða að hún gæti verið meira eða minna þróuð á sumum sviðum. Hér er rétt að benda á augljóst vandamál, svipað þýðingarvandanum sem áður var nefndur: hvað gerir eitthvað að stærðfræði – hvenær er réttlætanlegt að nefna fyrirbærið „annars konar stærðfræði“ og hvenær er það bara eitthvað allt annað? Af þessum ástæðum verður verkefnið ekki leyst í greininni, þó að möguleikanum verði velt upp.

Heimspeki stærðfræðinnar

Í hugum margra stærðfræðinga er heimspeki stærðfræðinnar kannski tvennt:

Í fyrsta lagi dálítið einangrað fræðasvið þar sem einkum eru stundaðar rannsóknir á svonefndum *undirstöðum stærðfræðinnar*. Hér er um að ræða frekar tæknilega grein, þar sem aðferðum stærðfræðinnar, einkum rökfræði og mengjafræði, er beitt á stærðfræðina sjálfa með formlegum hætti. Þessar rannsóknir gefa þá af sér niðurstöður um frumsendukerfi, hvort mögulegt sé að veikja frumsendur, að hve miklu leyti þær eru óháðar, hvað sígildar niðurstöður krefjast sterkra frumsendna, og svo framvegis. Ég held að almennt viðhorf stærðfræðinga til þessarar greinar sé fremur neikvætt, en hef þó engar kannanir við höndina. Þessi tæknilega grein er einhverskonar afkomandi rökfræðipælinga Russels, Frege og Hilberts sem voru eins og kunnugt er að leita að undirstöðum stærðfræðinnar í heimspekilegum skilningi: þeir töldu þörf á að sýna fram á að stærðfræðin væri í raun algerlega örugg og pottþétt. En með tímanum hefur hið upphaflega heimspekilega vandamál vikið til hliðar enda hafa stærðfræðingar litlar áhyggjur af því að hús þeirra muni hrynja til grunna vegna lélegra undirstaða.

Í öðru lagi vilja sumir heimspekingar enn ræða um undirstöður stærðfræðinnar, til dæmis um tilvist stærðfræðilegra hugtaka. Í hinni sígildu umræðu voru menn þá spurðir hvort þeir aðhylltust platónisma, innsæishyggju eða formhyggju. Í námskeiðum um heimspeki stærðfræðinnar fyrir nemendur í grunnnámi er farið í gegnum þessi þrjú sjónarmið, sem segja má að hafi verið nokkuð vel skilgreind um 1930. Sú umræða hefur ekki reynst sérlega frjó síðan þá, og í nýrri ævisögu grannfræðingsins L.E.J. Brouwers, frumkvöðuls innsæishyggjunnar, má sjá efnisgrein eins og

> Starfandi stærðfræðingur, sem hefur meiri áhuga á því að iðka stærðfræði en að ígrunda það, að hve miklu leyti hún er byggð á traustum undirstöðum, ætti erfitt með að hætta að undrast hvers vegna Brouwer, galdramaður grannfræðinnar, hefði yfirgefið gnægtarbrunn hefðbundinnar stærðfræði til að búa í skrjáfþurri eyðimörk undirstaðnanna. (Shulman, vefheimild, [16])

Þetta er samkvæmt minni reynslu frekar venjulegt viðhorf starfandi stærðfræðinga, en þessi þrískipta greining er þó hin sígilda mynd af heimspeki stærðfræðinnar.

Þessum stefnum lýsum við eftir að hafa skoðað eitt einfalt dæmi, náttúrlegu tölurnar. Það er kannski ekki vel þekkt utan heims stærðfræðinga að stærðfræðikenningar eru einkum settar fram með tvenns konar hætti: sem frumsendukerfi eða sem mengjasmíð. Á seinni árum hefur þriðja leiðin orðið vinsæl, ríkjafræðileg framsetning.

Frumsendur Peanos er eitt af þeim kerfum sem nota má til þess að skilgreina náttúrlegar tölur. Þær eru eftirfarandi

- 0 er **náttúrleg tala**.
- Sérhver náttúrleg tala a á sér **eftirfara**, sem er líka náttúrleg tala; táknum hann með a'.
- 0 er ekki **eftirfari** neinnar náttúrlegrar tölu.
- Um náttúrlegar tölur a og b gildir að $a = b$ þá og því aðeins að $a' = b'$.
- Ef fullyrðing gildir um 0, og um eftirfara sérhverrar náttúrlegrar tölu sem fullyrðingin gildir um, gildir hún um allar náttúrlegar tölur.

Nú má skilgreina reikniaðgerðirnar, til dæmis er samlagning skilgreind svo:

- $a + 0 = a$
- $a + b' = (a + b)'$

Með þessum hætti er hægt að rannsaka náttúrlegu tölurnar og eiginleika þeirra – eða hvað? Er þetta fullkomin lýsing á náttúrlegum tölum? *Eru* þetta náttúrlegu tölur*nar*?

Önnur aðferð er að ganga út frá mengjafræðinni sem gefinni (hún gæti verið sett fram sem frumsendukerfi) og smíða náttúrlegu tölurnar úr mengjum, nánar tiltekið með því að segja:

- Skilgreinum 0 sem tómamengið, $0 = \varnothing$.
- Skilgreinum eftirfara a sem sammengi a og mengisins sem inniheldur a sem stak, $a' = a \cup \{a\}$.
- Þetta safn af mengjum, $0, 0', 0''$, og svo framvegis, lítum við á sem náttúrlegu tölurnar.

Þetta safn af mengjum uppfyllir frumsendur Peanos. Samkvæmt þessu þá er talan 1 (**skilgreind** sem eftirfari 0) bara mengið $0' = 0 \cup \{0\} = \varnothing \cup \{\varnothing\} = \{\varnothing\}$ og talan 2 yrði $\{\varnothing\{\varnothing\}\}$ og svo framvegis. Tökum fram að ein af frumsendum mengjafræðinnar (sem ekki voru kynntar hér), frumsendan um óendanleikann, tryggir tilvist alls mengis náttúrlegra talna. (Það er að segja tryggir tilvistina í tæknilegum stærðfræðilegum skilningi.) En eru *þetta* náttúrlegu tölurnar? Um hvaða hluti voru menn þá að tala fyrir daga mengjafræðinnar seint á 19. öld?

Á seinni árum hefur rutt sér til rúms aðferð til framsetningar stærðfræðikenninga sem heitir ríkjafræði (category theory). Þetta merkilega tæki kom fyrst fram árið 1945 í greininni *General Theory of Natural Equivalences* eftir Eilenberg og Mac Lane en er í dag ómissandi í mörgum greinum stærðfræðinnar. Í ríkjafræðilegri framsetningu er öll áhersla lögð á *eiginleika* hugtaka, en minni á það hvernig eigi beinlínis að reikna. Gallinn (og kosturinn) er að ríkjafræði er mjög abstrakt, og því erfið fyrir byrjendur. Alfræðiorðabók Stanford háskólans um heimspeki segir eftirfarandi:

> Segja mætti að ríkjafræði sé hápunktur einnar dýpstu og öflugustu tilhneigingar í stærðfræðilegri hugsun á tuttugustu öld: leitin að almennasta og óhlutbundnasta kjarna hverra aðstæðna. (Jean-Pierre Marquis, vefheimild, [9])

Og það er semsagt hægt að túlka náttúrlegu tölurnar ríkjafræðilega og þá þarf ekki að minnast á mengi. Það er of tæknilegt fyrir þessa ritgerð að gera grein fyrir þessu, en benda má á (Jean-Pierre Marquis, vefheimild, [9]) ef lesandi hefur áhuga á að kynna sér þetta merkilega tæki nútíma stærðfræði.

Nú að hinum klassísku stefnum í heimspeki stærðfræðinnar, með dæmið um náttúrlegu tölurnar í huga, og tekið skal fram að greinargerðin er gróf og lausleg. Hér er ekki ætlunin að kynna fáguðustu útgáfur þessara hugmynda heldur kynna þær eða rifja upp og nefna helstu vandamál.

Þau sem aðhyllast *raunhyggju* um stærðfræði líta svo á að stærðfræði sé vísindi, leit að hlutlægum og eilífum sannindum. Stærðfræðilegar setningar fjalli um raunveruleikann og séu annaðhvort sannar eða ósannar, óháð því hvort mannlegir stærðfræðingar komi nálægt þeim. Tölur séu raunverulegir hlutir, sem við rannsökum. Náttúrlegu tölurnar eru því ekki mengi og frumsendur Peanos ekki annað en þokkaleg en ófullkomin lýsing á þeim. En vandi raunhyggjunnar felst í því að svara því *hvar* þessar tölur séu - eru þær úti í náttúrunni eða innan í höfðinu? Eða í einhverjum óhlutbundnum handanheimi eins og frummyndir Platóns? Og ef þær eru það, hvernig höfum við manneskjurnar þá aðgang að honum? Það er alþýðuspeki að flestir sem ekki hafa sérstaklega hugsað um heimspeki stærðfræðinnar séu Platónistar og trúi því að stærðfræðileg sannindi séu eilíf og óbreytanleg, lifi einhversstaðar handan mannlegrar hugsunar í heimi óhlutbundinna fyrirbæra. Í stuttu máli mætti kannski segja að Platónismi geri ráð fyrir því að táknmyndir okkar vísi einhvern veginn til táknmiða sem búa í heimi frummynda. Aðra tegund af raunhyggju mætti kalla rökfræðihyggju (hér er ekki um að ræða sígilda heimspekilega rökhyggju), sem segir að alla stærðfræði megi smætta niður í rökfræði, hún sé bara hluti af rökfræði, og niðurstöður hennar séu nauðsynleg sannindi. Á þessu eru tæknileg vandkvæði. Stærðfræði, eins og hún er almennt iðkuð í dag, byggir á mengjafræði, og þar með til dæmis á frumsendunni um óendanleg mengi: til er óendanlegt mengi. Ekki er nauðsynlegt að fallast á að þessi frumsenda sé hluti af rökfræði. (Mehlberg, bls. 67, [10]) Annað atriði er kannski tengdara gagnrýni smíðhyggjunnar og er í stuttu máli eftirfarandi. Til þess að setja fram stærðfræðikenningu á formlegan hátt (kenningunni er þá lýst á þann hátt að fjalla megi um hana með aðferðum rökfræðinnar) eru settir fram listar af reglum: Hvaða tákn eru notuð, og hvernig má raða þeim saman, ályktunarreglur, og frumsendur. En til þess að setja þessa lista fram og segja frá því hvernig á að skilja þá, þarf venjulegt óformlegt tungumál. (Mehlberg, bls. 68, [10]) Félagslega smíðhyggjan blandar sér þó í raun ekki í þessa umræðu. Gagnrýni hennar er hér (eftir sem áður) ekki sú að rökfræðihyggja sé röng í tæknilegum eða frumspekilegum skilningi. Hún einfaldlega lýsir ekki stærðfræði eins og hún er iðkuð. Stærðfræðingar sem vinna utan rökfræðinnar sem slíkrar notast venjulega ekki við formlega framsetningu stærðfræðikenningar. Sennilega vegna þess að það hjálpar þeim ekki við rannsóknir. Síðasta raunhyggjuafbrigðið sem talið verður hér er gjörólíkt hinum tveimur, og er kannski hin eina sanna raunhyggja, því samkvæmt því eru stærðfræðileg sannindi einfaldlega empírisk á sama hátt og eðlisfræðileg sannindi. Tveir plús tveir séu fjórir vegna þess að það er reynsla okkar af því þegar tvö pör koma saman. En hvað þá með óendanleikann? Hann er til í stærðfræði, er þar alls staðar og allt um kring að segja má, en hvaða reynslu höfum við manneskjur af óendanleikanum?

Samkvæmt *innsæishyggju* felst iðkun stærðfræði í því að smíða sífellt stærri og flóknari hugmyndir með einhverskonar eðlislægu stærðfræðilegu innsæi mannsins. Þannig býr stærðfræðin í raun innra með okkur, og er óháð tungumálinu, orðunum sem við notum til að (reyna að) tjá stærðfræði. Það má kannski líta á innsæishyggju sem einhverskonar Kantisma, náttúrlegu tölurnar eru til dæmis einfaldlega hluti af hugbúnaði okkar, komnar til vegna innsæis okkar um tímann. Eða táknfræðilega: heimur stærðfræðinnar er heimur hreinna táknmiða, táknmyndirnar hafa ekkert hlutverk. Stærðfræðileg fullyrðing verður einungis sönn (fyrir manni) þegar maður upplifir sannleika hennar. Þannig hafnar innsæishyggjan því að það hafi merkingu að tala um sannindi sem enginn hefur reynt, eða eins og Brouwer sagði: *there are no non-experienced truths*, (Shapiro, bls. 22, [15]) og hið gamla góða lögmál rökfræðinnar, lögmálið um annað tveggja, *tertium non datur*, er **ekki** tekið gilt. Maður skynjar ekki sannleika fullyrðingar með því að upplifa að neitun hennar leiði til mótsagnar. Þess vegna er innsæis-stærðfræði í veigamiklum atriðum frábrugðin hinni venjulegu og viðurkenndu.

Formhyggjan hefur verið sögð eiga rætur í skoðunum þýska stærðfræðingsins David Hilbert, sem lagði áherslu á það að í röksemdafærslum um stærðfræði (texta innan afleiðslustílsins, gætum við sagt) mætti ekki notast við neina eiginleika hugtaka aðra en þá sem fram koma í frumsendum og skilgreiningum. Þannig ættu sjálf orðin sem notuð eru ekki að skipta neinu máli fyrir röksemdafærslurnar. Við gætum kallað punkta borð, línur stóla og fleti bjórkönnur eins og fræg tilvitnun í Hilbert segir. (Hún er höfð eftir Otto Blumenthal, sjá Shapiro, bls. 157, [15]). Með þessu er líka vísað til þess að hugtök eins og punktur, lína og flötur eru óskilgreind, þau skilgreinast óbeint af frumsendunum.

Hilbert lagði fram rannsóknaráætlun með það að markmiði að sýna fram á að

a) alla stærðfræði mætti leiða út frá endanlegum fjölda frumsenda, og
b) að sannað yrði um eitthvert slíkt frumsendukerfi að það væri mótsagnalaust (Zach, vefheimild, [18])

Sönnunin á mótsagnarleysi frumsendukerfisins átti að notast við þá stærðfræði sem ómögulegt væri að efast um. Hilbert gerði aldrei alveg nákvæma grein fyrir því hvaða aðferðir væru leyfilegar, en innifalin í þeim væri örugglega talnareikningur (eins og lýst er með frumsendum Peanos). Kurt Gödel sannaði svo 1931 að þessum markmiðum verður ekki náð.

Hilbert hefur oft verið lesinn þannig að hann hafi talið stærðfræði leik að táknum, sem vísuðu ekki til neins sérstaks. Stærðfræði er lýst sem runum af táknum sem framleidd eru samkvæmt formlegum leikreglum. Það eru bara táknmyndir, engin táknmið, táknin hafa enga sérstaka merkingu, ekki frekar en að hrókur í skák táknar eitthvað sérstakt. (Rotman, bls. 5-6, [13]) Þannig má reyndar fá mynd af stærðfræði (sem texta) þar sem stærðfræðingurinn er frelsaður frá því að þurfa að útskýra eða velta fyrir sér frumspekilegum spurningum. Jafnvel þó að hugtökin eigi sér eðlilega uppsprettu í skynjun og skilningi mannsins, þá þarf hann ekki í sinni hugsun að túlka texta sinn yfir á eitthvað í heiminum. Hann er bara að leika sér. Þetta er líka hinn venjulegi hversdagslegi skilningur á orðinu formhyggja, og líklega sá sem flestir sem ekki hafa sérþekkingu leggja í það. Formhyggjumenn þurfa vissulega ekki að taka afstöðu til einhverrar endanlegrar verufræði, þeir geta vel fallist á að stærðfræði hafi merkingu, eða að sömu stærðfræði megi gæða mörgum mismunandi merkingum, enda fjalli greinin ekki um neina tiltekna hluti heldur sé einmitt opin fyrir hinum ýmsu túlkunum. En formhyggjan gerir semsagt enga tilraun til þess að útskýra eða gera grein fyrir því til hvers stærðfræðilegt hugtak vísar, stærðfræðilegur hlutur *er það sem hann gerir*, er bara „til“ í krafti hlutverka innan kerfa sem eru skilgreind með frumsendum.

> Stærðfræðilegur hlutur *er* það sem hann *gerir*. (Gowers, bls. 18, [3])

Um formhyggju hafði Lakatos þetta að segja

> Formhyggjan neitar að viðurkenna að það sem almennt hefur verið kallað stærðfræði, sé stærðfræði og hefur ekkert til málanna að leggja um vöxt hennar. (Lakatos, bls. 2, [8])

Margir hafa þó með góðum rökum haldið því fram að Hilbert hafi hvorki sagt né talið að stærðfræði væri leikur að innihaldslausum táknum. Í formála bókarinnar *Grundlagen der Geometrie*, segir hann til dæmis:

> Framsetning frumsenda rúmfræðinnar og rannsókn á samhengi þeirra er verkefni sem hefur verið fjallað um í fjölmörgum framúrskarandi verkum stærðfræðibókmenntanna allt síðan á tímum Evklíðs. Þetta verkefni sem hér er lýst felst í rökvissri greiningu á *skynjun okkar* á rúmi. (Hilbert, bls. VII, leturbreyting mín., [6])

Svo að telja verður harla ótrúlegt að Hilbert hafi verið þeirrar skoðunar sem honum er eignuð, þó svo að nota megi formhyggju til að „losna undan“ heimspekilegum vangaveltum.

Því verður ekki neitað hér, að hvert sjónarhorn um sig lýsir einhverju sem virðist réttmætt, tjáir einhverja eðlilega tilfinningu. Þau ná hinsvegar ekki að snerta á ýmsum áhugaverðum spurningum. Hér sem annars staðar í heimspeki er auðveldara að gagnrýna en að stinga upp á einhverju betra. Og staðreyndin er sú að langflestir stærðfræðingar hafa lítinn áhuga á þessu. Stærðfræðingurinn Doron Zeilberger segir á vefsíðu sinni:

> Hvað er stærðfræði? Flestir stærðfræðingar hafa ekki hugmynd og er alveg sama. Stærðfræði er það sem stærðfræðingar gera. (Zeilberger, vefheimild, [19])

En þarna er einmitt komin lykilspurning sem „ný kynslóð“ þeirra sem pæla í heimspeki stærðfræðinnar spyrja: *hvað er það sem stærðfræðingar gera?* (Erfið spurning fyrir raunhyggjufólk). Önnur mikilvæg spurning er þessi: *hvers vegna er stærðfræði áhugaverð?* (Erfið spurning fyrir formhyggjufólk.) Það mætti ef til vill kalla þetta „praktíska“ heimspeki stærðfræðinnar og sem einbeitir sér að stærðfræði sem afurð og áhugamáli manna og samfélaga. Einn þekktasti talsmaður þessa viðhorfs er bandaríski stærðfræðingurinn Reuben Hersh, sem nefnir það mannhyggju (humanism).

> Mannhyggjan sér að innsæishyggja, formhyggja og Platónismi hefja hvert um sig eitt tiltekið sjónarhorn upp á stall, og halda því fram að þetta takmarkaða sjónarhorn sé stærðfræði. (Hersh, bls. 22, [5])

Þess í stað vill hann hugsa um stærðfræði sem mannlegt fyrirbæri.

> Ef við hættum að hugsa um stærðfræði sem uppsprettu óyggjandi sanninda, getum við litið á hana sem eitthvað sem manneskjur stunda. Við gefumst upp á að láta gamlan draum rætast, en fáum í staðinn skýra hugmynd um það hvað við erum að gera, og af hverju.
>
> 1. Stærðfræði er mannlegt fyrirbæri. Hún er hluti af og fellur inn í menningu.
> 2. Stærðfræðileg þekking er ekki óbrigðul. Eins og í vísindum, þróast stærðfræði með því að mistök eru gerð, leiðrétt og endurleiðrétt. (Imre Lakatos sýndi snilldarlega fram á brigðulleikann í bók sinni *Proofs and Refutations*, [8])
> 3. Það eru mismunandi mælikvarðar á það hver telst sönnun, háð tíma, stað og fleiru. Notkun tölva við sannanir er óhefðbundin. Reynsla af heiminum, tölulegar tilraunir, sannanir byggðar á líkindum, allt eru þetta aðferðir sem hjálpa okkur að ákveða hverju við eigum að trúa í stærðfræði. Rökfræði Aristótelesar er ekki eina leiðin.
> 4. Stærðfræðileg fyrirbæri eru sérstök tegund af félags- og sögulegum fyrirbærum. Þau eru sérstakur hluti menningar okkar. Bókmenntir, trúarstofnanir og bankastarfsemi eru aðrir slíkir hlutar. Hver þessara er gerólíkur hinum. (Hersh, bls. 22, [5])

Það er ekki víst að Reuben Hersh trúi því að stærðfræði geti verið grunnur að alheimsfjarskiptum, geimverurnar gætu hugsanlega komist af án stærðfræði í okkar skilningi. Og það sem Hersh kallar mannhyggju er greinilega eitthvað sem Hacking mundi kalla félagslega smíðhyggju.

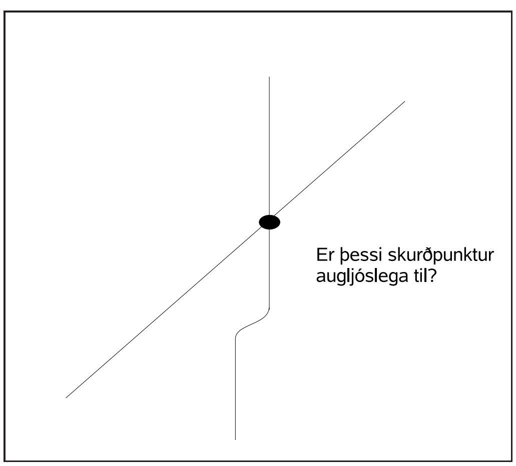
Lítum aðeins á þriðja atriðið á lista Hersh. Þar heldur hann því fram að hugtakið *sönnun* sé ekki fastákveðið og eilíft, heldur háð tíma og umhverfi. Sönnun er eitt mikilvægasta hugtak stærðfræðinnar, það skiptir bókstaflega öllu máli hvað telst rétt sönnun. Hinn hefðbundni skilningur er að stærðfræðisönnun fylgi afleiðslustíl þeim sem talinn er upprunninn hjá Grikkjum, og sjá megi gott dæmi um stílinn í *Frumþáttum* Evklíðs. Við hefðbundna sjónarmiðið er að minnsta kosti þrennt að athuga.

Í fyrsta lagi hafa hugmyndir um strangleika og nákvæmni breyst með tímanum. Á þetta bendir Hacking reyndar í ritgerð sinni um hugsunarstíla, og fræg bók Imre Lakatos *Proofs and Refutations* er ekkert annað en sýnidæmi um það hvernig þessar hugmyndir breytast og þróast - það sem er gild sönnun í dag er ógild á morgun. Eitt dæmi úr sögunni er milligildissetningin um samfelld föll. Margar sannanir voru settar fram á setningunni, en þær voru „gallaðar“ vegna þess að í þeim var ekki notast við nákvæmt samfelldnishugtak, heldur höfðað til þess að fullyrðingar væru augljósar út frá mynd. Það var ekki fyrr en 1817 að Bolzano gaf sönnun sem fullnægir nútímakröfum, og afrek hans var fyrst og fremst að *setja fram gagnlega skilgreiningu* á samfelldu falli. Einhvern tíma hefði verið hægt að benda á mynd, eins og hér að neðan, og fara svo að tala um eiginleika skurðpunktarins. Slíkar myndir eru líka notaðar, til að útskýra og styðjast við, en þær eru ekki leyfileg tæki til að sanna neitt í nútíma stærðfræði. Nefna mætti mýmörg dæmi í sama anda.

Í öðru lagi er mjög margt annað í sönnunum stærðfræðinga en klassískar rökhendur.

Í þriðja lagi hafa á seinni árum verið notaðar aðferðir innan hreinnar stærðfræði sem erfitt er að flokka sem afleiðslu, til dæmis tölvutilraunir og sannanir með líkindum. Um þetta segir til dæmis hinn hnyttni Doron Zeilberger:

> Það er miklu betri nýting á tíma manna að kenna tölvum að sanna í stað þess að við reynum að sanna hluti sjálfir. (Zeilberger, vefheimild, [19])



Doron Zeilberger er reyndar í minnihluta, hann vill í raun og veru gjörbreyta vinnubrögðum stærðfræðinga, og má skemmta sér vel við að lesa vefsíður hans með skoðanaskiptum hans við starfsystkin sín.

Og hugleiða skilgreiningar...

Hugleiðum nú hvernig stærðfræði er tungumál, hvernig hún snýst um að finna góðar leiðir til þess að tala og skrifast á um hluti, hvernig hún *verður til* í samskiptum. Þetta yrði þá vonandi liður í að framkalla eða rökstyðja þessa tilfinningu, að stærðfræði sé einhverskonar félagsleg smíð, innan ramma mannlegrar hugsunar í efnislegum veruleika. Ég tek hversdagsleg dæmi, bæði úr kennslubókum og dagblöðum, því að hvort tveggja eru mikilvægir miðlar, við fáum þekkingu okkar að töluverðu leyti þaðan. Hversdagslegu dæmin eru samt sem áður ekki um samlagningu lítilla talna, sem sumir, eins og David Corfield, telja að ofuráhersla á slík dæmi hafi staðið heimspeki stærðfræðinnar fyrir þrifum og takmarkað svið hennar. Í heimspeki raunverulegrar stærðfræði eru fjöldamörg áhugaverð heimspekileg vandamál, spurningar um tiltölulega háþróaða stærðfræði, það er að segja stærðfræði sem er ekki á færi nema fólks sem hefur töluverða þekkingu á stærðfræði. Það er um margt annað að ræða en að velta fyrir sér hlutum eins og hvernig við vitum að $5 + 7 = 12$. En vegna smættarhugmynda, að öll *stærðfræði sé í raun og veru* bara mengjafræði + afleiðsla, hafi menn hingað til talið að slík einföld stærðfræðisannindi séu einhverskonar allsherjar fulltrúar fyrir alla stærðfræði. En þessi skoðun er hliðstæð þeirri að þar sem að ljóð séu ekkert annað en orð + málfræði, sé öll sagan sögð um það hvað ljóð eru.

Byrjum á þessu (sem margir, sem ekki eru menntaðir stærðfræðingar vanmeta): hlutverk skilgreininga í stærðfræði. Þær eru jafnvel ennþá mikilvægari en setningar og sannanir. Margar reglur hafa þróast, frá því að hafa mjög flókna og langa sönnun, yfir í að hafa mjög einfalda sönnun. Munurinn liggur í því hvernig hugtökin voru skilgreind. Sem klassískt dæmi má nefna *setningu Stokes* úr stærðfræðigreiningu, mjög mikilvæg setning fyrir verkfræði og eðlisfræði. Í kennslubókinni sem ég las í Raunfallagreiningu III við Háskóla Íslands segir eftirfarandi:

> Það er sérstakt við setningu Stokes að það eina sem er erfitt við hana er hin margbrotna uppbygging hugtaka með skilgreiningum sem þarf til þess að geta sett hana fram. Þessar skilgreiningar eru um diffurform, afleiður þeirra, jaðra og áttun. Þegar þessi hugtök hafa verið skilin er setningin sjálf stutt og gagnorð og sönnunin ekki erfið. (Rudin, bls. 253, [14])

Reyndar er það ekki rétt að þetta sé sérstakt við setningu Stokes, og í annarri sígildri kennslubók (*Calculus on Manifolds* eftir Michael Spivak) gengur höfundur enn lengra:

> Setning Stokes deilir þremur mikilvægum eiginleikum með mörgum háþróuðum stórum setningum:
> 1. Hún er augljós.
> 2. Hún er augljós vegna þess að hugtökin í henni hafa verið almennilega skilgreind.
> 3. Hún hefur verulegar afleiðingar.
>
> (Zimmerman, vefheimild, [20])

Þetta er í raun og veru lýsandi fyrir eitt höfuðverkefni stærðfræðinga: að finna réttu orðin til þess að tala um hlutina, smíða hugtök sem duga. Í stærðfræðibókum er oft talað um svona uppbyggingu hugtaka sem *vél* (e. machinery). Með því er vísað til þess að eftir að vélin er komin í gang vinni hún sjálfvirkt, tungumálið leysi verkefnin nánast án þess að maður þurfi eitthvað að hugsa um það hvað maður er að gera.

Það er því ekki rétt sem stundum er haldið fram, að stærðfræðingar fáist fyrst og fremst við að sanna setningar. Stærðfræðitextarnir sjálfir, kennslubækurnar, dylja þetta hlutverk oft á tíðum, þar sem þeir eru oftast settir upp þannig, að fyrst koma frumsendurnar, svo skilgreiningar, og svo áfram eftir mynstrinu:

skilgreining
setning
sönnun
skilgreining
...

En iðulega eru frumsendurnar seinni tíma smíð, þær koma til *eftir* að skilningur á einhverju efni er orðinn „stöðugur", eftir að menn telja sig hafa komist að því hvernig best sé að hugsa og tala um tiltekin *óformleg vandamál*, það er að segja einhver verkefni sem ekki hafa verið sett fram af fullri nákvæmni innan frumsendukerfis. Tökum sem dæmi þekkta spurningu úr grannfræði, svokallaða Poincaré-tilgátu. Sigurður Helgason [17], stærðfræðiprófessor við MIT-háskólann lýsir tilgátunni þannig í Morgunblaðinu 18. ágúst 2006:

> „Ef maður hefur þrívítt rúm sem hefur þann eiginleika að hægt er að draga sérhverja kúrfu í þessu rúmi saman í punkt hlýtur þetta rúm að vera kúla eða svokallað grannmót við kúluna", sagði Sigurður.
> „Ef maður hefur hins vegar ímyndaðan kleinuhring í sama rúmi og snúru sem fer í gegnum deigið, gæti maður togað í þessa snúru, lengt hana og stytt en aldrei dregið hana saman í punkt. Perelman sýndi fram á að þessi tilgáta var rétt, líkt og almennt var talið. Hann sýndi fram á muninn á kúlu og kleinuhring í huga okkar stærðfræðinga."

Lýsing Sigurðar er mjög óformleg, og í raun og veru óralangt frá þeirri tæknilegu lýsingu sem finna má í stærðfræðibókum, en í þeim liggur auðvitað áratuga vinna stærðfræðinga við að skilgreina hugtök og að gera grein fyrir því í hverju svarið við spurningunni gæti falist, það er að segja *hvers konar* svar yrði tekið sem gilt. En það má spyrja: *í hvaða skilningi er vandamálið sem Sigurður lýsir, hið raunverulega stærðfræðilega verkefni*. Lofað var einni milljón dollara fyrir að skera úr um það hvort tilgáta Poincaré er rétt, og nú er almennt talið að rússneski stærðfræðingurinn Grigori Perelman eigi heimtingu á verðlaunafénu, eða stórum hluta þess. En er um að ræða einu réttu leiðina til að fjalla nákvæmlega um þessar hugmyndir okkar um þrívítt rúm? Eða gætum við haft einhverjar allt aðrar kenningar sem væru jafn góðar eða betri eða bara allt öðruvísi, eða hafa hugtök okkar einhvern innsta kjarna eða eðli, eitthvað sem er algilt? Eftir því sem Robert Magnus [12] prófessor í stærðfræði við Háskóla Íslands sagði í útvarpsþættinum Víðsjá snýst þetta um að *greina eðli þrívíðra rúma* en gæta verður þess að stærðfræðileg skilgreining á því, hvað þrívítt rúm er, er háþróuð og ekki víst að almenningur eða geimverur annars staðar skrifuðu upp á hana. Í fyrirlestranótum mínum úr grannfræði stendur að Poincare-tilgátan sé:

> Sérhver einfaldlega samanhangandi þjöppuð þrívíð víðátta er grannmóta S^3.

Hér táknar S^3 táknar hvel kúlu í fjórvíðu rúmi, hliðstæða við tvívítt yfirborð venjulegrar kúlu í þrívíðu rúmi. Öll orðin í setningunni hafa nákvæmlega skilgreinda merkingu í stærðfræði og eru ekki rétt skiljanleg nema þeim sem hafa lesið skilgreiningarnar (fyrir utan orðin *sérhver* og *er*).

Tilgáta Poincare hefur staðið lengi sem mikilvæg spurning, en við gætum spurt hvert sé hið raunverulega markmið. David Corfield greinir tvö: í fyrsta lagi reynum við að sanna eða afsanna tilgátu Poincare, en í öðru lagi snýst þetta, í stærra samhengi, um að þróa góða lýsingu á þrívíðum víðáttum. (Corfield, bls. 183, [2]).

Enn nútímalegri lýsing á tilgátunni, er eftirfarandi (John W. Morgan, 57, [11]):

> Ef M er lokuð þrívíð víðátta og undirstöðugrúpa hennar er fáfengileg, þá er M deildamóta S^3.

Þetta er þá örlítið dæmi um það hvernig tungumál stærðfræðinnar breytist. Við höfum séð að út frá einu sjónarmiði er hægt að líta á þróun stærðfræði sem þróun sameiginlegs samskiptatækis, því tungumál, orð, eru auðvitað til samskipta. Rétta svarið við spurningunni hvaðan er stærðfræðin, eða hvar, er þá: fyrst frá öðrum, frá kennurum og samnemendum, og síðar meir, fyrir þau sem stunda rannsóknir, verður hún til í samspili og samræðu. Jafnvel þótt sumir vinni oft einir á löngum tímabilum þá eru alltaf aðrir til að bregðast við, það verður alltaf einhver annar að skilja það sem þú ert að gera: annars verður verk þitt aldrei hluti af heimi stærðfræðinnar. Og þú byggir hugsun þína ofan á annarra. Til að stærðfræðin taki við verki þínu þarf það að hafa eitthvað að segja við aðra, og aðrir þurfa að taka við því. Og það er mjög mikilvægt einkenni á stærðfræði að hana *er hægt að kenna*. Það er dálítið erfitt fyrir platónista og formhyggjumenn að útskýra hvernig svo megi vera. Sjálfur taldi Platón að allt nám væri upprifjun frá fyrra lífi, lífi sálarinnar í heimi frummynda. Sá heimur er heimur hreinna forma, þar með talið stærðfræðilegra hluta, talna, beinna lína, hringa, og svo framvegis. Eða hvernig er annars hægt að læra að þekkja þennan handanheim. Formhyggjumaðurinn þarf að útskýra hvers vegna ætti að kenna merkingarlausa leiki að táknum. Fyrir félagslega smíðhyggju er þetta ekkert vandamál, því stærðfræði verður einmitt til í samskiptum, á löngum tíma, yfir kynslóðir, ávöxtur hugsunar mannsins um heiminn, verkfæri til þess að átta sig á aðstæðum.

Nútíma stærðfræði er reyndar orðin svo flókin og mikil vöxtum að það er orðið mjög áhugavert og sérstakt að fylgjast með því hvernig nýjar niðurstöður eru samþykktar og eru innlimaðar í greinina. Hér að ofan var minnst á starf Perelmans við að leysa tilgátu Poincaré, svar við spurningu sem er meira en hundrað ára gömul og á sér langan hala af lausnum sem hefur verið hafnað. Perelman birti þrjár ritgerðir á netinu á árunum 2002 og 2003. Hann hélt fyrirlestra um efnið í bandarískum háskólum árið 2003, en síðan þá hafa margar ráðstefnur og sumarnámskeið verið haldin til þess að komast megi til botns í þessum ritgerðum. Sérfræðingar hafa legið yfir ritgerðunum í meira en þrjú ár og núna virðist vera að myndast samkomulag um það að Perelman eigi að teljast hafa leyst verkefnið. En það ber að geta þess að mikil vinna hefur verið unnin við að gera nánari grein fyrir ýmsum atriðum sem Perelman sjálfur gerði ekki, auk þess sem að hann byggir sína vinnu á ýmsum fyrri rannsóknum. Því er hugsanlegt að heiðrinum verði deilt, sérílagi hefur verið minnst á bandaríska stærðfræðinginn Richard S. Hamilton sem á heiðurinn af einu mikilvægasta hugtaki sem Perelman nýtti sér í ritgerðum sínum, svonefndu Ricci-flæði. Það sem er áhugavert í þessu máli er þá ferlið: hópar sérfræðinga taka að sér að fara yfir og skilja verkið, leiðrétta villur í því (já, það hafa fundist fjölmargar villur - þær hafa þá verið leiðréttar eða hjáleiðir hafa fundist) og skýra það, en líka þetta, að ein helsta framförin í glímunni við gátuna var að fara að tala um rétta hlutinn, Ricci-flæðið. Skilgreining leikur lykilhlutverk. Ágætt og stutt yfirlit um sögu lausnar Perelmans er að finna í (Jackson, bls. 897-901, [7]).

Ég hef hér að ofan farið mjög almennum orðum um nokkur dæmi en held að það sé ljóst að margt megi læra af því hvernig stærðfræðingar tala (skrifa). Hreinn stærðfræðitexti er alls ekki *formlegur* í tæknilegri merkingu, hann er ekki rökfræði og ekki afleiðsla eins og stundum er sagt. Hann er morandi af líkinga- og myndmáli, það er talað um *vélar* (e. machinery), *tæki* (e. tools), að búa til og byggja upp og margt fleira. Oft eru líka skýringarmyndir svo ekki sé talað um öll þau hrip og allt það krot sem verður til hjá stærðfræðingnum en fer svo ekki í greinina eða bókina sem síðar er gefin út.

Stærðfræðingur sem táknfari

Á seinni árum hafa menn eins og Reuben Hersh, Brian Rotman, David Corfield og fleiri reynt að hugsa heimspeki stærðfræðinnar upp á nýtt, hugsa um stærðfræði sem lifandi og síbreytilegt sammannlegt form hugsunar. Þeir neita því einfaldlega að stærðfræði þurfi *undir-*

stöður. Og segja má að bara það geri kraftaverk og losi okkur við óskiljanlega hlekki, af hverju í ósköpunum ætti stærðfræði að þurfa undirstöður? Stærðfræði er félagslegt, menningarlegt og sögulega tilkomið fyrirbæri. Við leggjum stund á hana í öllu okkar samhengi og því gæti hún verið með öðrum hætti, en það þýðir **ekki** að hún gæti verið *hvernig sem er*. Heimurinn er eins og hann er, eða hann blasir við okkur einmitt eins og hann gerir. Við erum eins og við erum, mótuð líffræðilega og sögulega, með okkar sérstöku skynfæri, heila, líkamlegu þarfir og langanir. Við erum félagsleg, lifum ekki nema í samfélagi og *tölum saman*.

Brian Rotman reynir í bókinni *Mathematics as sign*, að gera grein fyrir stærðfræði sem táknkerfi og skrifverki (e. graphism). Stærðfræði er vissulega leikur að táknum segir hann, en ekki innihaldslausum táknum, eins og formhyggjan segir, táknin hljóta að hafa merkingu, annars væru þau (og stærðfræðin) ekki áhugaverð.

> Tökum eftir að stærðfræðingar eyða tíma sínum í að pára og hugsa: skrifa eða vinna með eða útbreiða ótrúlegan fjölda af táknum, ásamt því að hugsa um alls konar ímyndaða heima og hluti/ferli innan þeirra. (Rotman, bls. 121, [13])

Merkingin er að vísu ekki föst og óbreytileg, og er jafnvel margræð - sem er nokkuð sem margir stærðfræðingar eiga ef til vill erfitt með að sætta sig við. Því að í stærðfræðitexta er merking hugtaka svo gott sem alveg laus við margræðni. Hins vegar er óformlega merkingin breytileg, það er að segja menn greinir oft á um það hver sé rétta leiðin til þess að formgera hinar óformlegu hugmyndir. David Corfield segir um þetta:

> Ekkert hugtak í stærðfræði er nokkurn tíma komið í sitt endanlegt horf - allt er opið fyrir endurtúlkun, jafnvel náttúrlegu tölurnar (Corfield, bls. 21, [2])

En Rotman vill sem sagt fjalla (heimspekilega) um tákn- og málheim stærðfræðinnar, og hann gerir það með því að setja upp líkan af stærðfræðingi, eða þeim sem les eða skrifar stærðfræðitexta, og skiptir í þrennt:

a) Persóna, manneskjan í heiminum
b) Stærðfræðilegt sjálf
c) Fulltrúi sjálfsins „í textanum“

Hann hugsar sér að stærðfræðin sjálf sé sett fram á táknmáli (e. Code) (sem felur í sér venjulegt ritmál, stærðfræðitákn, skýringarmyndir o.s.fr.) en að hugsun manneskjunnar sé stigi ofar, og fari fram á „yfirtáknmáli“ (e. metaCode), sem er þá *um* táknmálið.

Lesandi stærðfræðitexta er til dæmis oft beðinn að taka eftir að einhver fullyrðing gildi um allar náttúrlegar tölur, velja óendanlega oft - í stuttu máli er honum sagt að „gera“ eitthvað sem alls ekki er hægt að gera í hinum efnislega raunveruleika, og ekki heldur í huganum (þú getur ekki talið óendanlega lengi í huganum heldur).

Eitt af því áhugaverða sem Rotman fjallar um í þessu sambandi er hugtakið óendanleiki. Eitthvað sem við getum kallað „óendanleg ferli“ gegnsýra alla stærðfræði nútímans. Ekkert er að því að segja að mengi innhaldi óendanlega mörg stök, því það hefur nákvæma merkingu: það er hvaða mengi sem er, sem er ekki endanlegt, og endanlegt mengi er bara mengi sem hefur einhvern ákveðinn endanlegan fjölda staka. En hver hefur séð eða hugsað óendanlegt mengi? Í hvaða skilningi halda náttúrlegu tölurnar áfram að eilífu? Venjulega svarið er eftirfarandi:

> Ef þær gerðu það ekki, þá væri til einhver stærsta tala N; og þar sem alltaf má bæta einum við og fá út töluna $N + 1$, þá getur ekki verið nein stærsta tala; því eru heilu tölurnar endalausar. (Rotman, bls. 92, [13])

En hver eða hvað er það sem getur alltaf bætt einum við? Er óendanleiki hluti af skynjun okkar? Er hann *nauðsynlegur* fyrir okkur til að gera grein fyrir náttúrufyrirbærum? Í hreinum stærðfræðilegum skilningi er tilvist óendanleikans einfaldlega tryggð með frumsendu: við gerum einfaldlega ráð fyrir því að til sé óendanlegt mengi. En til hvaða skýru hugmyndar vísar óendanlegt mengi?

Það má kalla skemmtilega þverstæðu að öflugasta hjálpartæki nútíma vísinda, tölvan, er „endanlegt“ tæki. Hún getur ekki talið endalaust, það er *ekki rétt* að við tölu megi alltaf bæta við einum, eða deila með tveimur. Engu að síður gefa tölvulíkön oft mun gagnlegri upplýsingar en stærðfræðikenningar. Tölvan getur reiknað út gríðarlega mikið magn upplýsinga og sett niðurstöðurnar fram á mynd. Allt er þetta reikningur með einföldum aðgerðum á litlum tölum (í stærðfræðilegum skilningi eru allar tölur sem hægt er að geyma í minni tölvu litlar). Myndin segir kannski meira en þúsund síður af fáguðum kenningum. Ef menn hefðu getað byggt einhverskonar tölvur eða reikniverk fyrir (segjum) rúmum hundrað árum er ekki víst að stærðfræðigreining hefði þróast á þeim nótum sem hún hefur gert. Menn hefðu frekar einbeitt sér að því að finna betri leiðir til að hanna endanleg líkön og reikniaðferðir, í stað þess að leita að jöfnum sem byggja á hugtökum um óendanleika, markgildi, samfelldni, diffranleg föll og svo framvegis. Kannski hefði afleiðslustíllinn dáið út; í stað þess að bera á borð sönnun á því að jafna hefði verið leyst væri bent á skjáinn (eða pappír) og sagt: sjáðu myndina! Og hér er ekki einungis átt við einfaldar kyrramyndir heldur hreyfimyndir jafnvel með einhverskonar gagnvirkni. Nú má segja að svona hugartilraunir séu tilgangslausar, og eins mætti til dæmis rökstyðja að ef sjónvarp hefði verið til á miðöldum, þá hefðu matarvenjur fólks hugsanlega þróast öðruvísi. En því er til að svara að stærðfræði hefur það orð á sér að vera óvefengjanleg og óbreytanleg umfram flesta ef ekki alla þekkingu, auk þess sem það er einmitt galli við hinar hefðbundnu heimspekistefnur um stærðfræði að í þeim er ekkert sagt um þróun og breytingar í stærðfræði.

Tölvumyndir koma með alveg nýja vídd inn í stærðfræðina og í ritgerðinni Visible Structures in Number Theory eftir Borwein og Jörgenson er því haldið fram að tölvusjónsköpun (computer visualization) eigi eftir að hafa mikil áhrif:

> Sjónsköpun eykur við náttúrulegt innsæi stærðfræðingsins til þess að skynja viðfangsefni sín, til þess að sjá hluti sem tilheyra vinnu hans með aðstoð hugbúnaðar og vélbúnaðar. Þar sem myndræn framsetning hefur sterkar rætur í sannanlega réttum reikniritum og vélum, þá geta myndirnar og miðlarnir líka gefið nýjar aðferðir til að gera grein fyrir efni og jafnvel til sannana. Mikilvægast er þó, að eins og geimflaugar, köfunarkúpur og rafeindasmásjár, þá fer hún með mannshugann á staði sem hann hefur aldrei komið til, og sýnir honum myndir úr áður óþekktum heimi. (Borwein og Jörgenson, vefheimild, [1])

Þessi aðferð, eða sproti af hinni lífrænu heild sem stærðfræðin er, er að vísu skammt komin og ekki er ljóst hvernig hann þróast – í raun og veru er mikil andstaða við tölvustærðfræði innan stærðfræðiheimsins. Með því er ekki átt við að stærðfræðingar nýti sér ekki tölvur til aðstoðar á ýmsa vegu, heldur hitt að almennt er álitið að stærðfræðisannanir eigi að vera með gamla laginu og viðfangsefnin séu enn þau sömu.

Rotman nefnir nokkra eðlisfræðinga á þeirri skoðun að það sé ekkert pláss fyrir óendanleika í raunvísindum, óendanleiki sé dulspeki. Donald Greenspan talar fyrir því að henda stærðfræðigreiningu á haugana, ekki eingöngu vegna þess að óendanleikinn hafi enga efnisheimslega merkingu, heldur hafi hann heldur enga eðlilega rúmfræðilega túlkun í raunveruleikanum. Hann segir að óendanleikinn sé í besta falli ekki gagnlegur – hvorki til að hugsa með né til útreikninga – til að rannsaka ólínuleg kerfi, og í versta falli sé hann afvegaleiðandi, vegna þess að hann leiðir til þess að óviðkomandi gervivandamál komist í brennidepil. Hann telur að gagnlegra sé að nota mismunajöfnur en deildajöfnur til að lýsa ólínulegum fyrirbærum. (Rotman, bls. 79, [13]) Eðlisfræðingurinn John Wheeler er svo annar afneitari óendanleikans, og um hina samfelldu rauntalnalínu segir hann:

> Samfella efnisheimsins, og allt hið fagra hugtakakerfi eðlisfræðinnar er goðsögn, upphafning. Tilvist, það sem við köllum raunveruleika, er byggð á hinu strjála. (Rotman, bls. 80, [13])

En það er ekki til nein önnur eðlisfræði til hliðar við hina sígildu, eðlisfræði sem kemst hjá því að nýta sér hugtök stærðfræðinnar um óendanleg mengi og óendanleg ferli. Eða engin eðlisfræði sem tekin er alvarlega í samfélagi vísindanna, er kennd í raunvísindadeildum háskóla eða nýtt við hátækni. Nema í þeim skilningi að öll tölvulíkön (sem gegnsýra vísindastarf nútímans) eru í raun og veru bæði endanleg og strjál: tölvan vinnur með takmarkað minni og tölur sem hafa takmarkaða nákvæmni (það er að segja: ekki rauntölur). Eins og staðan er í dag byggja líkönin og hugsun fræðimannsins oft á venjulegum kenningum, og meðfram því allskonar tækni til að meta skekkju og ónákvæmni. En stundum er ef til vill bara byggt á gögnum, mælingum, mismunajöfnum, án vísunar í sígildar kenningar sem byggja á stærðfræðigreiningu.

Burt á vængjum

Stærðfræði er: starfsemi manna, viðleitni til skilnings, verkfæri vísinda og tækni, landslag, ekki um neitt, um frummyndir, um skynjun mannsins á heiminum, flókin bygging, lífræn heild, allstaðar, fyrir alla, móðir allra vísinda, það sem stærðfræðingar gera, tungumál vísindanna, hluti af eðlisfræði, leikur að táknum, ekki áhorfendaíþrótt, kraftaverk, algild sannindi, lýrík hreinna hugmynda og guðdómlegt brjálæði. Það er hægt að hugsa um hana úr mörgum áttum. Niðurstöður þessara hugleiðinga eru þessar: stærðfræði lærum við af öðrum og aðrir læra hana af okkur, auk þess sem við getum aukið við hana sjálf. Stærðfræði hefur alltaf verið bundin í og nátengd aðferðum okkar við að setja fram og skrásetja upplýsingar: talað orð, strik í sandi, blek á pappír, tölvuminni, tölvumyndir. Stærðfræði hefur þróast og breyst og mun halda því áfram eftir því sem tækni og hugðarefni mannsins breytast. Stærðfræði er þess vegna hluti af menningu og er félagsleg smíð. Hún gæti verið öðruvísi en hún er, hún gæti breyst, þó svo að hluti hennar, fullyrðingar eins og $5 + 7 = 12$, séu örugg sannindi, ef orðið sannindi á að hafa einhverja merkingu. Erfitt er að hugsa sér geimverur sem kunna að taka á móti rafsegulbylgjumerkjum en geta ekki talið upp að 12. Hins vegar er ekkert víst að þær þekki frumtölur, hafi slíkt hugtak. En um það getum við ekkert sagt. Rýni í raunverulegt starf stærðfræðinga getur verið frjó og skapað margar áhugaverðar spurningar, og það getur gefið innsýn í heim stærðfræðinnar bara að sjá þær spurningar; flestu venjulegu fólki sem ekki hefur hugleitt málið dettur sjálfsagt ekki í hug að stærðfræði geti verið dularfull grein þar sem menn greinir á um það hvað þeir séu í raun að gera. Starf stærðfræðinga er ekki síst að smíða og bæta hugtök og hugtakakerfi sem gagnast okkur til að skilja og skýra heiminn, ekki síður en að leita að og sanna tímalausar staðreyndir. Það er gagnlegra og áhugaverðara að skoða greinina sem félagslega smíð, sögulega tilkomna og lifandi, heldur en að festast í frumspekilegum vangaveltum um *hið raunverulega eðli hennar* eða að leita að hinu endanlega fullkomna bjargi sem hún er byggð á, eða með orðum Reuben Hersh: Stærðfræði þarf ekki undirstöður – hún hefur vængi.

Summary: This expository article investigates some recent trends in the philosophy of mathematics. In particular it examines in what way it makes sense to look at mathematics as a social construction. Mathematical practice is not fully captured by formal representation and formalism can not answer many important questions about mathematics, for instance: what is mathematics for, why is it it interesting? Moreover, since many mathematical concepts, like "infinity", do not correspond to any discernible thing in the natural world, and concepts evolve as well as methods of investigation and standards of proof, the question is put forward if mathematical concepts are more usefully viewed as social constructions rather than as platonic ideas or eternal truths.

Heimildir

[1] Peter Borwein, Loki Jörgenson (án ártals). Visible Structures in Number Theory. `http://www.cecm.sfu.ca/ loki/Papers/Numbers/Numbers.html` (sótt 20. ágúst 2006)

[2] David Corfield (2003). *Towards a Philosophy of Real Mathematics.* Cambridge: Cambridge University Press.

[3] Timothy Gowers (2002). *Mathematics - A Very Short Introduction.* Oxford University Press: Oxford.

[4] Ian Hacking (2003). *The Social Construction of What?* Harvard University Press: Cambridge, Mass.

[5] Reuben Hersh (1998). *What is Mathematics Really.* Vintage: London.

[6] David Hilbert (1923). *Grundlagen der Geometrie* (sechste Auflage). Leipzig: B.G. Teubner.

[7] Allyn Jackson (2006). Conjectures No More?: Consensus Forming on the Proofs of Poincaré and Geometrization Conjectures. *Notices of the American Mathematical Society* **53**(8), bls. 897-901.

[8] Imre Lakatos (1999). *Proofs and Refutations: The Logic of Mathematical Discovery.* Cambridge: Cambridge University Press.

[9] Jean-Pierre Marquis (2006). Category Theory. *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Spring 2006 Edition), Edward N. Zalta (ritstj.), `http://plato.stanford.edu/archives/spr2006/entries/category-theory/` (sótt 20. ágúst 2006).

[10] Henry Mehlberg (2002). The Present Situation in the Philosophy of Mathematics, *Philosophy of Mathematics* (Ritstj. Dale Jacquette) bls. 65-82. Oxford: Blackwell.

[11] John W. Morgan (2004). Recent Progress on the Poincare Conjecture and the Classification of 3-manifolds. *Bulletin of the American Mathematical Society* **42**(1), bls. 57-78.

[12] Robert Magnus (2006). Viðtal í *Víðsjá* 18. ágúst 2006.

[13] Brian Rotman (2000). *Mathematics as Sign.* Stanford University Press: Stanford.

[14] Walter Rudin (1976). *Principles of Mathematical Analysis*, Third Edition. New York: McGraw-Hill.

[15] Stewart Shapiro (1997). *Philosophy of Mathematics: Structure and Ontology.* Oxford University Press: New York.

[16] Bonnie Shulman (2006). Read This: Mystic, Geometer, and Intuitionist: The Life of L. E. J. Brouwer, Vol. 2.

http://www.maa.org/reviews/Mystic2.html (Sótt 11. ágúst 2006).

[17] Sigurður Helgason (2006). Lýst eftir dularfullum stærðfræðisnillingi. *Morgunblaðið* 18. ágúst 2006.

[18] Richard Zach (2003). Hilbert's Program. *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Fall 2003 Edition), Edward N. Zalta (ritstj.), http://plato.stanford.edu/archives/fall2003/entries/hilbert-program/ (sótt 22. febrúar 2007).

[19] Doron Zeilberger (2006). Opinion 72: The Next Term in the Sequence: [Dog, Human, Mathematician, ...] is Computer-Programmer for Computer-Generated Mathematics. http://www.math.rutgers.edu/~zeilberg/ fb72.html (Sótt 11. ágúst 2006).

[20] Mark Zimmerman (2006). Stokes Theorem in ZhurnalWiki. http://zhurnal.net/ww/zw?StokesTheorem (Sótt 11. ágúst 2006).

Um höfundinn: Höfundur er frjáls vísindamaður, skáld og húsfreyr. Hann er með BS og MPaed próf í stærðfræði frá Háskóla Íslands. Hann hefur kennt við Verzlunarskóla Íslands, en einnig ritað greinar um ljóð, menntamál og fleira og flutt pistla í þættinum Víðsjá á Rás 1.

Ránargötu 45
101 Reykjavík
ingog@internet.is

Móttekin: 1. mars 2007