*Tímarit um raunvísindi og stærðfræði*
**3**. árg. 1. hefti 2005 – raust.is/2005/1/04

# Tengiregla í þriggja staka mengi

Friðrik Diego og Kristín Halla Jónsdóttir

Kennaraháskóla Íslands

*Vefútgáfa: 30. desember 2005*

**Ágrip** – Mengi með aðgerðum og reglur þar að lútandi eru snar þáttur í algebru. Ein af grunnreglunum er tengiregla. Hér er fjallað um aðgerðir í þriggja staka mengi og sýnt fram á að tengiregla gildir fyrir nákvæmlega 113 af þeim tæplega tuttugu þúsund aðgerðum sem til eru í menginu. Kemur og fram hverjar þessar tengnu aðgerðir eru.

## 1. Inngangur

Fjöldi mismunandi aðgerða í mengi með $n$ stökum er $n^{(n^2)}$, þar af er fjöldi víxlinna aðgerða $n^{\frac{n(n+1)}{2}}$. Fjöldi aðgerða sem hafa hlutleysu er $n^{(n-1)^2+1}$ og fjöldi aðgerða sem hafa núllstak er sá sami. Fyrir alls $(n-1)^n \cdot n^{n^2-n}$ aðgerðir er ekki til sjálfvalda stak og þá má með frádrætti finna fjölda aðgerða sem hafa sjálfvalda stak. Þessar stærðir er allar auðvelt að reikna út, en slíkt hið sama á ekki við ef svara skal spurningunni:

“Hve margar aðgerðir í mengi með $n$ stökum eru tengnar?”

Megintilgangur þessarar greinar er að svara þessari spurningu fyrir mengi með þremur stökum, með öðrum orðum kanna hve margar hinna 19.683 mismunandi aðgerða í þriggja staka mengi eru tengnar. Að yfirlögðu ráði kjósum við að styðjast við hugtök og aðferðir úr algebru fremur en að forrrita tölvu til verksins.

Við bendum áhugasömum lesendum á eftirfarandi heimildir þar sem unnt er að afla sér frekari vitneskju um mengi og aðgerðir í þeim: [1, 2].

## 2. Helstu hugtök

*Aðgerð* í mengi $S$ er regla sem úthlutar sérhverri raðtvennd $(a, b)$, þar sem $a$ og $b$ eru stök úr $S$, nákvæmlega einu staki úr $S$.

Stakið sem aðgerðin úthlutar tiltekinni raðtvennd $(a, b)$ er jafnan táknað $ab$. Stundum er vísað til aðgerðar í mengi sem margföldunar.

Hlutmengi $H$ úr mengi $S$ með aðgerð er sagt *lokað* með tilliti til aðgerðarinnar ef $ab$ er í $H$ fyrir öll $a$ og $b$ úr $H$.

Aðgerð í mengi $S$ er sögð *víxlin* ef $xy = yx$ fyrir sérhvert $x$ og $y$ úr $S$. Einnig er þá sagt að *víxlregla* gildi fyrir aðgerðina.

Aðgerð í mengi $S$ er sögð *tengin* ef $(xy)z = x(yz)$ fyrir sérhvert $x$, $y$ og $z$ úr $S$. Einnig er þá sagt að *tengiregla* gildi fyrir aðgerðina.

Stak $x$ úr mengi $S$ með aðgerð er sagt *sjálfvalda* ef $xx = x$.

Stak $e$ úr mengi $S$ með aðgerð er sagt *hlutleysa* ef $ex = x$ og $xe = x$ fyrir sérhvert $x$ úr $S$.

Stak $z$ úr mengi $S$ með aðgerð er sagt *núllstak* ef $zx = z$ og $xz = z$ fyrir sérhvert $x$ úr $S$.

*Einsmótun* milli $S$ og $S'$, tveggja mengja með aðgerðum, er gagntæk vörpun $\varphi$ frá $S$ til $S'$ þannig að um öll $x$ og $y$ í $S$ gildi $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$.

Ef til er einsmótun milli $S$ og $S'$, þá eru $S$ og $S'$ sögð *einsmóta*, táknað $S \approx S'$.

*Andeinsmótun* milli $S$ og $S'$, tveggja mengja með aðgerðum, er gagntæk vörpun $\varphi$ frá $S$ til $S'$ þannig að um öll $x$ og $y$ í $S$ gildi $\varphi(xy) = \varphi(y)\varphi(x)$.

Ef til er andeinsmótun milli $S$ og $S'$, þá eru $S$ og $S'$ sögð *andeinsmóta*, táknað $S \approx a\, S'$.

*Hálfgrúpa* er mengi $S$ með tenginni aðgerð.

Ef $a$ er stak í hálfgrúpu og $n$ er náttúrleg tala þá má skilgreina $a^n$ sem $n$-þátta margfeldið $aaa \ldots a$ .

## 3. Gagnlegar setningar

Eftirfarandi setningar um mengi $S$ og $S'$ með aðgerðum eru þekktar og auðsannaðar.

**Setning 1.** Ef til er hlutleysa í $S$ þá er hún aðeins ein.

**Setning 2.** Ef til er núllstak í $S$ þá er það aðeins eitt.

**Setning 3.** Ef til er einsmótun milli $S$ og $S'$ og tengiregla gildir fyrir aðgerðina í $S$, þá gildir hún líka fyrir aðgerðina í $S'$.

**Setning 4.** Ef til er andeinsmótun milli $S$ og $S'$ og tengiregla gildir fyrir aðgerðina í $S$, þá gildir hún líka fyrir aðgerðina í $S'$.

**Setning 5.** Látum $S$ vera endanlegt mengi og aðgerð í $S$ skilgreinda með aðgerðartöflu $A$. Látum $A^T$ skilgreina aðgerð í menginu $S' = S$. Þá er til andeinsmótun milli $S$ og $S'$. ($A^T$ stendur fyrir aðgerðartöfluna sem fram kemur þegar töflu $A$ er bylt.)

## 4. Sýnidæmi

Lítum á mengi með tveimur stökum, $S = \{a, b\}$. Fjöldi mismunandi aðgerða í þessu mengi er 16. Aðgerðartöflur þeirra eru hér að neðan.

$$\begin{array}{c|cc} 1 & a & b \\ \hline a & a & a \\ b & a & a \end{array} \quad \begin{array}{c|cc} 2 & a & b \\ \hline a & a & a \\ b & a & b \end{array} \quad \begin{array}{c|cc} 3 & a & b \\ \hline a & a & a \\ b & b & a \end{array} \quad \begin{array}{c|cc} 4 & a & b \\ \hline a & a & a \\ b & b & b \end{array}$$

$$\begin{array}{c|cc} 5 & a & b \\ \hline a & a & b \\ b & a & a \end{array} \quad \begin{array}{c|cc} 6 & a & b \\ \hline a & a & b \\ b & a & b \end{array} \quad \begin{array}{c|cc} 7 & a & b \\ \hline a & a & b \\ b & b & a \end{array} \quad \begin{array}{c|cc} 8 & a & b \\ \hline a & a & b \\ b & b & b \end{array}$$

$$\begin{array}{c|cc} 9 & a & b \\ \hline a & b & a \\ b & a & a \end{array} \quad \begin{array}{c|cc} 10 & a & b \\ \hline a & b & a \\ b & a & b \end{array} \quad \begin{array}{c|cc} 11 & a & b \\ \hline a & b & a \\ b & b & a \end{array} \quad \begin{array}{c|cc} 12 & a & b \\ \hline a & b & a \\ b & b & b \end{array}$$

$$\begin{array}{c|cc} 13 & a & b \\ \hline a & b & b \\ b & a & a \end{array} \quad \begin{array}{c|cc} 14 & a & b \\ \hline a & b & b \\ b & a & b \end{array} \quad \begin{array}{c|cc} 15 & a & b \\ \hline a & b & b \\ b & b & a \end{array} \quad \begin{array}{c|cc} 16 & a & b \\ \hline a & b & b \\ b & b & b \end{array}$$

Með beinni athugun á töflunum má álykta:

Átta aðgerðir eru víxlnar. Þær eru í töflum 1, 2, 7, 8, 9, 10, 15, 16.

Átta aðgerðir eru tengnar. Þær eru í töflum 1, 2, 4, 6, 7, 8, 10, 16.

Sex aðgerðir eru bæði víxlnar og tengnar. Þær eru í töflum 1, 2, 7, 8, 10, 16.

Fjórar aðgerðir hafa hlutleysu. Þær eru í töflum 2, 7, 8, 10 og reynast vera bæði víxlnar og tengnar.

Fjórar aðgerðir hafa núllstak. Þær eru í töflum 1, 2, 8, 16 og reynast vera bæði víxlnar og tengnar.

Tvær aðgerðir hafa bæði hlutleysu og núllstak. Þær eru í töflum 2 og 8 og reynast vera bæði víxlnar og tengnar.

Í þeim tilgangi að finna fjölda tenginna aðgerða er ekki nauðsynlegt að kanna allar töflurnar sextán, heldur mætti leita að einsmótunum og andeinsmótunum (sjá kafla 3). Eina gagntæka vörpunin sem til greina kemur er sú sem víxlar á $a$ og $b$ svo þetta reynist auðvelt og leiðir í ljós (númerin vísa í aðgerðartöflurnar): 1≈16, 2≈8, 3≈$a$5, 3≈12, 3≈$a$14, 4≈$a$6, 5≈$a$12, 5≈14, 7≈10, 9≈15, 11≈$a$13 og 12≈$a$14. Það myndi því nægja að kanna hvort aðgerðirnar í töflum 1, 2, 3, 4, 7, 9 og 11 séu tengnar, sem er fljótlegra en að kanna allar 16 aðgerðirnar. Vitanlega yrði niðurstaðan sú sama og áður, það er að segja tengnu aðgerðirnar af þessum sjö aðgerðum eru í töflum 1, 2, 4 og 7 en tengnu aðgerðirnar í allt átta talsins. Þær er að finna í töflum 1 og 16, 2 og 8, 4 og 6, 7 og 10.

## 5. Aðgerðir í mengi með þremur stökum

Fjöldi aðgerða í mengi með þremur stökum er 19.683 samkvæmt formúlu í inngangi þessarar greinar. Af þessum aðgerðum eru 729 víxlnar, 243 aðgerðir hafa hlutleysu og sömuleiðis eru 243 aðgerðir þar sem til er núllstak. Fjöldi aðgerða sem hafa sjálfvalda stak er 13.851. Hliðstæðar tölur má auðveldlega reikna fyrir aðgerðir í hvaða gefnu endanlegu mengi sem er. Á hinn bóginn er ekki svo einfalt að finna fjölda tenginna aðgerða í gefnu endanlegu mengi og vandinn vex með fjölda staka í menginu. Við munum nú leita svars við spurningunni: Hve margar tengnar aðgerðir eru í mengi með þremur stökum?

Að sanna tengireglu fyrir gefna aðgerð í þriggja staka mengi $S$ felur í sér að sannreyna 27 mismunandi skilyrði af gerðinni $(xy)z = x(yz)$, þar sem $x$, $y$ og $z$ eru úr $S$. Eitt mótdæmi nægir til að sýna að viðkomandi aðgerð sé ekki tengin, en ljóst er að mótdæmin sem afsanna tengireglu geta verið fleiri en eitt. Þegar vísað er til ákveðins skilyrðis tengireglu, með stökum $x$, $y$ og $z$, þá munum við einfaldlega skrifa $xyz$ til að tákna það skilyrði, við látum með öðrum orðum $xyz$ vísa til skilyðisins $(xy)z = x(yz)$. Auðséð er, að sé eitt af stökunum $x$, $y$ og $z$ hlutleysa eða núllstak, þá stenst skilyrðið $(xy)z = x(yz)$.

Umfjöllun um tengnar aðgerðir í þriggja staka mengi $S = \{a, b, c\}$ skiptum við nú í tilvik. Fyrst eru teknar fyrir aðgerðir sem hafa hlutleysu eða núllstak, enda eru þá líkurnar á að tengiregla gildi mun meiri en ella. Síðan fjöllum við um aðgerðir sem hafa hvorki hlutleysu né núllstak.

## 5.1. Aðgerðir sem hafa hlutleysu eða núllstak

### 5.1.1. Aðgerðir sem hafa hlutleysu

Gerum ráð fyrir að $a$ sé hlutleysa. Í aðgerðartöflu eru fimm sæti af níu nú ráðin og heildarfjöldi möguleika á útfyllingu hinna sætanna fjögurra er 81. Um 16 af þeim töflum gildir að hlutmengið $\{b, c\}$ er lokað með tilliti til aðgerðarinnar. Samkvæmt fyrri athugun á tengireglu í tveggja staka mengi (kafli 4) má finna mótdæmi við tengireglu í 8 af þessum 16 tilvikum og ef finna má mótdæmi við tengireglu í 2×2 hluttöflunni er það um leið mótdæmi við tengireglu í 3×3 töflunni. Í hinum 8 tilvikunum gildir tengiregla í 2×2 hluttöflunni og þar sem $a$ er hlutleysa er ljóst að þá gildir tengiregla í allri 3×3 töflunni. Þetta eru töflurnar:

| | $a$ | $b$ | $c$ |
|---|---|---|---|
| $a$ | $a$ | $b$ | $c$ |
| $b$ | $b$ | $b$ | $b$ |
| $c$ | $c$ | $b$ | $b$ |

| | $a$ | $b$ | $c$ |
|---|---|---|---|
| $a$ | $a$ | $b$ | $c$ |
| $b$ | $b$ | $b$ | $b$ |
| $c$ | $c$ | $b$ | $c$ |

| | $a$ | $b$ | $c$ |
|---|---|---|---|
| $a$ | $a$ | $b$ | $c$ |
| $b$ | $b$ | $b$ | $b$ |
| $c$ | $c$ | $c$ | $c$ |

| | $a$ | $b$ | $c$ |
|---|---|---|---|
| $a$ | $a$ | $b$ | $c$ |
| $b$ | $b$ | $b$ | $c$ |
| $c$ | $c$ | $b$ | $c$ |

| | $a$ | $b$ | $c$ |
|---|---|---|---|
| $a$ | $a$ | $b$ | $c$ |
| $b$ | $b$ | $b$ | $c$ |
| $c$ | $c$ | $c$ | $b$ |

| | $a$ | $b$ | $c$ |
|---|---|---|---|
| $a$ | $a$ | $b$ | $c$ |
| $b$ | $b$ | $b$ | $c$ |
| $c$ | $c$ | $c$ | $c$ |

| | $a$ | $b$ | $c$ |
|---|---|---|---|
| $a$ | $a$ | $b$ | $c$ |
| $b$ | $b$ | $c$ | $b$ |
| $c$ | $c$ | $b$ | $c$ |

| | $a$ | $b$ | $c$ |
|---|---|---|---|
| $a$ | $a$ | $b$ | $c$ |
| $b$ | $b$ | $c$ | $c$ |
| $c$ | $c$ | $c$ | $c$ |

Við lítum nú á aðgerðir þar sem 2×2 hluttaflan er ekki lokuð, með öðrum orðum mengið $\{b, c\}$ er ekki lokað. Hér koma fjórir möguleikar til greina. Stakið $a$ getur komið fyrir nákvæmlega einu sinni, nákvæmlega tvisvar sinnum, nákvæmlega þrisvar sinnum eða fjórum sinnum í hluttöflunni. Við skoðum hvern möguleika fyrir sig.

i) $a$ kemur nákvæmlega einu sinni fyrir.
Tilheyrandi aðgerðartöflur eru 32 talsins og í ljós kemur að einungis tvær þeirra eru tengnar. Þetta eru eftirfarandi töflur:

| | $a$ | $b$ | $c$ |
|---|---|---|---|
| $a$ | $a$ | $b$ | $c$ |
| $b$ | $b$ | $a$ | $c$ |
| $c$ | $c$ | $c$ | $c$ |

| | $a$ | $b$ | $c$ |
|---|---|---|---|
| $a$ | $a$ | $b$ | $c$ |
| $b$ | $b$ | $b$ | $b$ |
| $c$ | $c$ | $b$ | $a$ |

Báðar töflurnar hafa $a$ á hornalínunni, enda gefa $cbc$ eða $bcb$ mótdæmi við tengiregluna ef $a$ er það ekki. Í töflunni vinstra megin er $c$ núllstak en í hinni er $b$ núllstak. Þetta er óhjákvæmilegt því annars má finna mótdæmi við tengireglu meðal skilyrðanna $bcc$, $ccb$, $cbb$ og $bbc$.

ii) $a$ kemur nákvæmlega tvisvar sinnum fyrir.
Tilheyrandi töflur eru 24 talsins og einungis ein þeirra er tengin. Það er taflan:

| | $a$ | $b$ | $c$ |
|---|---|---|---|
| $a$ | $a$ | $b$ | $c$ |
| $b$ | $b$ | $c$ | $a$ |
| $c$ | $c$ | $a$ | $b$ |

Í öllum öðrum tilvikum er mótdæmi að finna meðal $bbc$, $ccb$, $cbb$ og $bcc$.

iii) $a$ kemur nákvæmlega þrisvar sinnum fyrir.
Tilheyrandi töflur eru 8 talsins og engin þeirra er tengin. Mótdæmi fást úr $bbc$ og $ccb$.

iv) $a$ kemur fjórum sinnum fyrir.
Hér er aðeins um eina töflu að ræða og hún er ekki tengin, mótdæmi er $bbc$.

Við höfum þá séð að nákvæmlega 11 þeirra aðgerða í $S$ þar sem $a$ er hlutleysa eru tengnar og þessar aðgerðartöflur koma fram hér á undan. Tilsvarandi töflur þar sem $b$ er hlutleysa eru sömuleiðis 11 talsins og enn aðrar 11 töflur hafa $c$ sem hlutleysu. Við getum því ályktað (sjá kafla 3) að heildarfjöldi tenginna aðgerða í $S$ sem hafa hlutleysu ($a$, $b$ eða $c$) sé 33.

### 5.1.2. Aðgerðir sem hafa núllstak

Við gerum líkt og hér á undan. Gerum ráð fyrir að $a$ sé núllstak. Ljóst er að til er 81 slík aðgerð. Þar af eru 16 aðgerðir þar sem hlutmengið $\{b, c\}$ er lokað. Samkvæmt athugun okkar á tengireglu í tveggja staka mengi (kafli 4) má finna mótdæmi við tengireglu í 8 af þessum 16 tilvikum og það er þá um leið mótdæmi við tengireglu í 3×3 tilvikinu. Í hinum 8 tilvikunum gildir tengiregla í 2×2 hluttöflunni og þar sem $a$ er núllstak þá er ljóst að tengiregla gildir í allri 3×3 töflunni. Þessar 8 tengnu töflur eru eins og töflurnar í 5.1.1. nema nú er $a$ núllstak en ekki hlutleysa.

Við lítum næst á aðgerðir þar sem 2×2 hluttaflan er ekki lokuð. Hér koma 4 möguleikar til greina. Stakið $a$ getur komið fyrir nákvæmlega einu sinni, nákvæmlega tvisvar sinnum, nákvæmlega þrisvar sinnum eða fjórum sinnum í hluttöflunni. Við skoðum hvern möguleika fyrir sig.

i) $a$ kemur nákvæmlega einu sinni fyrir.
Tilheyrandi aðgerðartöflur eru 32 talsins og í ljós kemur að einungis tvær þeirra eru tengnar. Þetta eru eftirfarandi töflur:

| | $a$ | $b$ | $c$ |
|---|---|---|---|
| $a$ | $a$ | $a$ | $a$ |
| $b$ | $a$ | $a$ | $b$ |
| $c$ | $a$ | $b$ | $c$ |

| | $a$ | $b$ | $c$ |
|---|---|---|---|
| $a$ | $a$ | $a$ | $a$ |
| $b$ | $a$ | $b$ | $c$ |
| $c$ | $a$ | $c$ | $a$ |

Í öllum öðrum tilfellum er mótdæmi að finna meðal $bbb$, $bbc$, $bcb$, $bcc$, $cbb$, $cbc$, $ccb$ og $ccc$.
ii) $a$ kemur nákvæmlega tvisvar sinnum fyrir.
Tilheyrandi töflur eru 24 talsins og 5 þeirra eru tengnar. Þetta eru eftirfarandi töflur:

| | $a$ | $b$ | $c$ |
|---|---|---|---|
| $a$ | $a$ | $a$ | $a$ |
| $b$ | $a$ | $b$ | $a$ |
| $c$ | $a$ | $a$ | $c$ |

| | $a$ | $b$ | $c$ |
|---|---|---|---|
| $a$ | $a$ | $a$ | $a$ |
| $b$ | $a$ | $a$ | $a$ |
| $c$ | $a$ | $b$ | $c$ |

| | $a$ | $b$ | $c$ |
|---|---|---|---|
| $a$ | $a$ | $a$ | $a$ |
| $b$ | $a$ | $b$ | $c$ |
| $c$ | $a$ | $a$ | $a$ |

| | $a$ | $b$ | $c$ |
|---|---|---|---|
| $a$ | $a$ | $a$ | $a$ |
| $b$ | $a$ | $a$ | $b$ |
| $c$ | $a$ | $a$ | $c$ |

| | $a$ | $b$ | $c$ |
|---|---|---|---|
| $a$ | $a$ | $a$ | $a$ |
| $b$ | $a$ | $b$ | $a$ |
| $c$ | $a$ | $c$ | $a$ |

Í öllum öðrum tilfellum er mótdæmi að finna meðal sömu skilyrða og í i).
iii) $a$ kemur nákvæmlega þrisvar sinnum fyrir.
Tilsvarandi töflur eru 8 talsins og fjórar þeirra eru tengnar. Þetta eru eftirfarandi töflur:

| | $a$ | $b$ | $c$ |
|---|---|---|---|
| $a$ | $a$ | $a$ | $a$ |
| $b$ | $a$ | $b$ | $a$ |
| $c$ | $a$ | $a$ | $a$ |

| | $a$ | $b$ | $c$ |
|---|---|---|---|
| $a$ | $a$ | $a$ | $a$ |
| $b$ | $a$ | $c$ | $a$ |
| $c$ | $a$ | $a$ | $a$ |

| | $a$ | $b$ | $c$ |
|---|---|---|---|
| $a$ | $a$ | $a$ | $a$ |
| $b$ | $a$ | $a$ | $a$ |
| $c$ | $a$ | $a$ | $b$ |

| | $a$ | $b$ | $c$ |
|---|---|---|---|
| $a$ | $a$ | $a$ | $a$ |
| $b$ | $a$ | $a$ | $a$ |
| $c$ | $a$ | $a$ | $c$ |

Mótdæmi fyrir hinar fjórar eru gefin með $bbc$, $bcc$, $cbb$ og $ccb$.
iv) $a$ kemur fjórum sinnum fyrir.
Hér er um eina töflu að ræða sem er augljóslega tengin.

| | $a$ | $b$ | $c$ |
|---|---|---|---|
| $a$ | $a$ | $a$ | $a$ |
| $b$ | $a$ | $a$ | $a$ |
| $c$ | $a$ | $a$ | $a$ |

Við höfum nú séð að nákvæmlega 20 þeirra aðgerða í $S$ þar sem $a$ er núllstak eru tengnar og við getum ályktað (sjá kafla 3) að heildarfjöldi tenginna aðgerða sem hafa núllstak í $S$ ($a$, $b$ eða $c$) sé 60.

#### 5.1.3. Aðgerðir sem hafa hlutleysu og núllstak

Gerum ráð fyrir að $a$ sé hlutleysa og að $b$ sé núllstak. Eina tengiregluskilyrðið sem þá þarf að kanna er $ccc$ og það stenst hvort sem $cc = a$, $cc = b$ eða $cc = c$. Þetta eru töflurnar:

| | $a$ | $b$ | $c$ |
|---|---|---|---|
| $a$ | $a$ | $b$ | $c$ |
| $b$ | $b$ | $b$ | $b$ |
| $c$ | $c$ | $b$ | $a$ |

| | $a$ | $b$ | $c$ |
|---|---|---|---|
| $a$ | $a$ | $b$ | $c$ |
| $b$ | $b$ | $b$ | $b$ |
| $c$ | $c$ | $b$ | $b$ |

| | $a$ | $b$ | $c$ |
|---|---|---|---|
| $a$ | $a$ | $b$ | $c$ |
| $b$ | $b$ | $b$ | $b$ |
| $c$ | $c$ | $b$ | $c$ |

Nú er hægt að velja hlutleysu og núllstak meðal $a$, $b$ og $c$ á 6 ólíka vegu og því er ljóst að alls eru 18 tengnar aðgerðir í $S$ sem hafa bæði hlutleysu og núllstak.

Við drögum nú saman fengnar niðurstöður í kafla 5.1. Fjöldi tenginna aðgerða í $S$ sem hafa hlutleysu er 33. Fjöldi tenginna aðgerða í $S$ sem hafa núllstak er 60. Fjöldi tenginna aðgerða í $S$ sem hafa bæði hlutleysu og núllstak er 18. Fjöldi tenginna aðgerða í $S$ sem hafa hlutleysu, núllstak eða hvort tveggja er því $33 + 60 - 18 = 75$.

### 5.2. Aðgerðir sem hafa hvorki hlutleysu né núllstak

Við höfum nú skoðað allar hugsanlegar aðgerðir sem hafa hlutleysu eða núllstak en í framhaldinu gerum við ráð fyrir að hvorki sé til hlutleysa né núllstak í $S$. Eftirfarandi setning kemur að miklum notum.
**Setning.** Ef aðgerð í $S = \{a, b, c\}$ er tengin þá er til sjálfvalda stak í S.
**Sönnun:** Veljum stakið $a$ og lítum á stökin $a$, $a^2$, $a^3$ og $a^4$ í $S$. Þau geta í mesta lagi verið þrjú ólík stök svo einhver tvö þeirra eru jöfn. Eitthvert af sex eftirfarandi tilfellum hlýtur því að gilda:

i) $a^2 = a$ og þá er $a$ sjálfvalda stak.
ii) $a^3 = a$ og þá er $a^2$ sjálfvalda stak því $(a^2)^2 = a^4 = a^3a = aa = a^2$.
iii) $a^4 = a$ og þá er $a^3$ sjálfvalda stak því $(a^3)^2 = a^6 = a^4a^2 = aa^2 = a^3$.
iv) $a^3 = a^2$ og þá er $a^2$ sjálfvalda stak því $(a^2)^2 = a^4 = a^3a = a^2a = a^3$.
v) $a^4 = a^2$ og þá er $a^2$ sjálfvalda stak.
vi) $a^4 = a^3$ og þá er $a^3$ sjálfvalda stak því $(a^3)^2 = a^6 = a^4a^2 = a^3a^2 = a^4a = a^3a = a^4 = a^3$.

Þessi setning um tilvist sjálfvalda staks í þriggja staka hálfgrúpu er einfalt sértilfelli setningar sem Frobenius sannaði í grein sem birtist árið 1895 [3]. Í greininni sýnir Frobenius meðal annars fram á, að sé $S$ hálfgrúpa, $a$ stak í $S$ og hluthálfgrúpan $\{a, a^2, a^3, a^4 \dots\}$ endanleg þá innihaldi hluthálfgrúpan nákvæmlega eitt sjálfvalda stak.

E.H. Moore sýndi svo fram á það árið 1902, að eitthvert veldi sérhvers staks í endanlegri hálfgrúpu sé sjálfvalda stak. Sjá [4].

Í ljósi setningarinnar hér að ofan má einskorða athugun á tengnum aðgerðum í þriggja staka mengi $S = \{a, b, c\}$ við að stakið $a$ sé sjálfvalda, það er að segja gera má ráð fyrir að $aa = a$, en síðan má telja hve margar þeirra aðgerða uppfylla að auki $bb = b$ og/eða $cc = c$.

Að skilyrðinu $aa = a$ gefnu eru eftirfarandi 9 möguleikar á útfyllingu fyrstu línu aðgerðartöflu: $a\,a\,a$, $a\,a\,b$, $a\,a\,c$, $a\,b\,a$, $a\,b\,b$, $a\,b\,c$, $a\,c\,a$, $a\,c\,b$ og $a\,c\,c$. Þrjá af þessum möguleikum má útiloka strax, því línurnar $a\,a\,b$ og $a\,c\,b$ standast ekki skilyrðið $aac$ og línan $a\,c\,a$ stenst ekki skilyrðið $aab$. Eftir standa 6 möguleikar á útfyllingu fyrstu línu töflunnar, þeir eru: $a\,a\,a$, $a\,a\,c$, $a\,b\,a$, $a\,b\,b$, $a\,b\,c$ og $a\,c\,c$ og við munum vísa til þeirra með númerum 1 til 6.

Á sama hátt og gildir fyrir línur eru 9 möguleikar á útfyllingu fyrsta dálks aðgerðartöflu og af sambærilegum ástæðum og áður koma aðeins tilsvarandi 6 dálkar til greina og við vísum líka til þeirra með númerum 1 til 6.

Útfylling fyrstu línu og fyrsta dálks er sem sagt í hæsta lagi hugsanleg á $6 \times 6 = 36$ vegu ef aðgerðin á að vera tengin (og gefið er að $aa = a$).

Þessum 36 mögulegu töfluhlutum gefum við númer eftir númeri línu og númeri dálks, þannig myndi möguleiki til dæmis nefnast 2-4, ef hann samanstendur af línu nr. 2 og dálki nr. 4. Sá töfluhluti lítur svona út:

$$\begin{array}{c|ccc} \text{2-4} & a & b & c \\ \hline a & a & a & c \\ b & b & & \\ c & b & & \end{array}$$

Við getum kannað þessa möguleika hvern og einn, en þá athugun má einfalda töluvert með því að kanna sameiginlega þá möguleika sem fyrirsjáanlega fela í sér sama fjölda af útfylltum töflum fyrir tengna aðgerð.

Látum nú $f$ tákna þá einsmótun frá $S$ til $S$, sem víxlar á $b$ og $c$. Sú einsmótun tengir töflu sem hefst á línu nr. 2 ($a\,a\,c$) við töflu sem hefst á línu nr. 3 ($a\,b\,a$). Því sést að sérhver fullgerð tafla sem hefst á línu nr. 2 á sér samsvörun í einsmóta töflu sem hefst á línu nr. 3. Hið sama má segja um töflur sem byrja á línum nr. 4 og 6 ($a\,b\,b$ og $a\,c\,c$).

Við einsmótunina $f$ munu hinsvegar línur nr. 1 og 5 varpast í sjálfar sig, þetta eru línurnar $a\,a\,a$ og $a\,b\,c$.

Fyrir línurnar (dálkana) sex og ofangreinda einsmótun $f$ má því setja fram eftirfarandi gildi:
$f(1)$=1, $f(2)$=3, $f(3)$=2, $f(4)$=6, $f(5)$=5 og $f(6)$=4.

Einsmótunin $f$ tengir saman töfluhluta $x$-$y$ og $f(x)$-$f(y)$. Þannig gefur $f$ allmörg dæmi um ólíka töfluhluta sem leiða til sama fjölda tenginna aðgerða, til dæmis 1-2 og 1-3, 1-4 og 1-6, 2-1 og 3-1, 2-2 og 3-3. Að auki er ávallt fullvíst að töfluhlutar $x$-$y$ og $y$-$x$ munu leiða til sama fjölda tenginna aðgerða, þar sem töfluhluti $y$-$x$ fæst með því að bylta töfluhluta $x$-$y$ (sjá kafla 3). Möguleikana 36 má samkvæmt framansögðu draga saman í eftirtalda 13 flokka, sem kallaðir eru F1-F13.

| F1 | F2 | F3 | F4 | F5 | F6 | F7 | F8 | F9 | F10 | F11 | F12 | F13 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1-1 | 1-2 | 1-4 | 1-5 | 2-2 | 2-3 | 2-4 | 2-5 | 2-6 | 4-4 | 4-5 | 4-6 | 5-5 |
| | 1-3 | 1-6 | 5-1 | 3-3 | 3-2 | 3-6 | 3-5 | 3-4 | 6-6 | 5-4 | 6-4 | |
| | 2-1 | 4-1 | | | | 4-2 | 5-2 | 4-3 | | 5-6 | | |
| | 3-1 | 6-1 | | | | 6-3 | 5-3 | 6-2 | | 6-5 | | |

Hverjum flokki mætti lýsa með tilliti til algebrulegra sérkenna sinna og töfluhlutar innan sama flokks leiða örugglega til sama fjölda tenginna aðgerða. Til nánari skoðunar nægir nú að velja einn fulltrúa hvers flokks og við veljum fyrsta töfluhluta hverju sinni.

Flokkunum 13 má reyndar enn fækka. Allar aðgerðir sem hafa núllstak eða hlutleysu hafa þegar verið teknar fyrir svo hér þarf ekki að taka fyrir flokk F1 (þar sem $a$ er núllstak) og flokk F13 (þar sem $a$ er hlutleysa).

Lítum á flokka F7, F9 og F12. Töfluhlutar þeirra eru:

$$\begin{array}{c|ccc} \text{2-4} & a & b & c \\ \hline a & a & a & c \\ b & b & & \\ c & b & & \end{array} \qquad \begin{array}{c|ccc} \text{2-6} & a & b & c \\ \hline a & a & a & c \\ b & c & & \\ c & c & & \end{array} \qquad \begin{array}{c|ccc} \text{4-6} & a & b & c \\ \hline a & a & b & b \\ b & c & & \\ c & c & & \end{array}$$

Hæglega má sjá að þessir töfluhlutar standast ekki skilyrði $aca$ eða $aba$ og því er enga tengna aðgerð að finna í þessum flokkum.

Eftir standa 8 flokkar með ýmist tveimur eða fjórum töfluhlutum hver.

| | F2 | F3 | F4 | F5 | F6 | | F8 | | F10 | F11 | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1-2 | 1-4 | 1-5 | 2-2 | 2-3 | | 2-5 | | 4-4 | 4-5 | | |
| | 1-3 | 1-6 | 5-1 | 3-3 | 3-2 | | 3-5 | | 6-6 | 5-4 | | |
| | 2-1 | 4-1 | | | | | 5-2 | | | 5-6 | | |
| | 3-1 | 6-1 | | | | | 5-3 | | | 6-5 | | |

Eins og fyrr segir nægir að velja einn fulltrúa hvers flokks og við veljum töfluhlutana: 1-2, 1-4, 1-5, 2-2, 2-3, 2-5, 4-4 og 4-5. Þeir eru eftirfarandi:

$$\begin{array}{c|ccc} \text{1-2} & a & b & c \\ \hline a & a & a & a \\ b & a & & \\ c & c & & \end{array} \quad \begin{array}{c|ccc} \text{1-4} & a & b & c \\ \hline a & a & a & a \\ b & b & & \\ c & b & & \end{array} \quad \begin{array}{c|ccc} \text{1-5} & a & b & c \\ \hline a & a & a & a \\ b & b & & \\ c & c & & \end{array}$$

$$\begin{array}{c|ccc} \text{2-2} & a & b & c \\ \hline a & a & a & c \\ b & a & & \\ c & c & & \end{array} \quad \begin{array}{c|ccc} \text{2-3} & a & b & c \\ \hline a & a & a & c \\ b & b & & \\ c & a & & \end{array} \quad \begin{array}{c|ccc} \text{2-5} & a & b & c \\ \hline a & a & a & c \\ b & b & & \\ c & c & & \end{array}$$

$$\begin{array}{c|ccc} \text{4-4} & a & b & c \\ \hline a & a & b & b \\ b & b & & \\ c & b & & \end{array} \quad \begin{array}{c|ccc} \text{4-5} & a & b & c \\ \hline a & a & b & b \\ b & b & & \\ c & c & & \end{array}$$

Lítum á fulltrúa 1-2. Í töfluhluta 1-2 má velja $bb$ og $bc$ á eftirfarandi 9 vegu, sem við númerum 1-9.

$$\begin{array}{c|ccc} 1 & a & b & c \\ \hline a & a & a & a \\ b & a & a & a \\ c & c & & \end{array} \quad \begin{array}{c|ccc} 2 & a & b & c \\ \hline a & a & a & a \\ b & a & a & b \\ c & c & & \end{array} \quad \begin{array}{c|ccc} 3 & a & b & c \\ \hline a & a & a & a \\ b & a & a & c \\ c & c & & \end{array}$$

$$\begin{array}{c|ccc} 4 & a & b & c \\ \hline a & a & a & a \\ b & a & b & a \\ c & c & & \end{array} \quad \begin{array}{c|ccc} 5 & a & b & c \\ \hline a & a & a & a \\ b & a & b & b \\ c & c & & \end{array} \quad \begin{array}{c|ccc} 6 & a & b & c \\ \hline a & a & a & a \\ b & a & b & c \\ c & c & & \end{array}$$

$$\begin{array}{c|ccc} 7 & a & b & c \\ \hline a & a & a & a \\ b & a & c & a \\ c & c & & \end{array} \quad \begin{array}{c|ccc} 8 & a & b & c \\ \hline a & a & a & a \\ b & a & c & b \\ c & c & & \end{array} \quad \begin{array}{c|ccc} 9 & a & b & c \\ \hline a & a & a & a \\ b & a & c & c \\ c & c & & \end{array}$$

Nota má skilyrðin þrjú $bba$, $bbc$ og $bca$ til að útiloka aðrar töflur en 1, 4 og 6. Af skilyrðum $cab$ og $cac$ fæst beint að $cb = c$ og $cc = c$. Í töflu 6 er þá $b$ hlutleysa og öll slík tilvik eru þegar afgreidd. Eftir standa tvær töflur, 1 og 4, sem sýndar eru fullgerðar hér að neðan.

$$\begin{array}{c|ccc} & a & b & c \\ \hline a & a & a & a \\ b & a & a & a \\ c & c & c & c \end{array} \quad \begin{array}{c|ccc} & a & b & c \\ \hline a & a & a & a \\ b & a & b & a \\ c & c & c & c \end{array}$$

Þessar aðgerðir reynast tengnar og hafa hvorki núllstak né hlutleysu.

Lítum næst á fulltrúa 1-4. Af skilyrðum $bab$ og $bac$ fæst strax $bb = b$ og $bc = b$. Taflan er þá orðin:

$$\begin{array}{c|ccc} & a & b & c \\ \hline a & a & a & a \\ b & b & b & b \\ c & b & & \end{array}$$

Þessa töflu má ljúka við á tvo vegu þannig að úr verði tengin aðgerð:

$$\begin{array}{c|ccc} & a & b & c \\ \hline a & a & a & a \\ b & b & b & b \\ c & b & b & b \end{array} \quad \begin{array}{c|ccc} & a & b & c \\ \hline a & a & a & a \\ b & b & b & b \\ c & b & b & c \end{array}$$

Aðrar útfærslur á töfluhluta 1-4 koma ekki til greina eins og sannreyna má af skilyrðum $ccb$, $cba$, $cca$ og $cba$.

Þá eru eftir sex fulltrúar, 1-5, 2-2, 2-3, 2-5, 4-4 og 4-5 sem alla má afgreiða á svipaðan hátt og hér hefur verið gert. Við förum ekki í gegnum þá röksemdafærslu lið fyrir lið en setjum fram niðurstöðurnar varðandi tengnar aðgerðir sem hafa hvorki hlutleysu né núllstak.

Eftirfarandi fulltrúar skila einni tenginni aðgerð: 1-5, 2-2, 4-4 og 4-5. Töflurnar sem þannig fást eru:

$$\begin{array}{c|ccc} & a & b & c \\ \hline a & a & a & a \\ b & b & b & b \\ c & c & c & c \end{array} \quad \begin{array}{c|ccc} & a & b & c \\ \hline a & a & a & c \\ b & a & a & c \\ c & c & c & a \end{array} \quad \begin{array}{c|ccc} & a & b & c \\ \hline a & a & b & b \\ b & b & a & a \\ c & b & a & a \end{array} \quad \begin{array}{c|ccc} & a & b & c \\ \hline a & a & b & b \\ b & b & b & b \\ c & c & c & c \end{array}$$

Fulltrúi 2-3 skilar engri tenginni aðgerð og fulltrúi 2-5 skilar engri tenginni aðgerð án hlutleysu eða núllstaks.

Samandregnar niðurstöður úr athugun á hinum 8 fulltrúum eru þá sem hér segir:

| Fulltrúi flokks | 1-2 | 1-4 | 1-5 | 2-2 | 2-3 | 2-5 | 4-4 | 4-5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Tengnar aðgerðir fyrir fulltrúann | 2 | 2 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| Fjöldi töfluhluta í flokki | 4 | 4 | 2 | 2 | 2 | 4 | 2 | 4 |
| Tengnar aðgerðir alls | 8 | 8 | 2 | 2 | 0 | 0 | 2 | 4 |

Við sjáum að hér fást alls 26 tengnar aðgerðir. Rifjum upp að gengið var út frá því að $a$ væri sjálfvalda stak ($aa = a$) og að hvorki væri til hlutleysa né núllstak. Nú gefur auga leið að fyrir sama fjöldi tenginna aðgerða er $b$ sjálfvalda stak og sömuleiðis fyrir sama fjölda tenginna aðgerða er $c$ sjálfvalda stak. Hægur vandi er að skrifa upp þær 26 töflur þar sem $a$ er sjálfvalda og telja að á meðal þeirra eru 18 sem hafa $bb = b$ og af þeim 18 eru 14 með $cc = c$. Af þessu má sjá, til dæmis með einfaldri Vennmynd eða með útreikningi á borð við $26+26+26-(18+18+18)+14 = 38$, að heildarfjöldi tenginna aðgerða sem hvorki hafa hlutleysu né núllstak er 38.

## 6. Niðurstaða

Niðurstaða þessarar greinar er sú, að meðal hinna 19.683 mismunandi aðgerða í þriggja staka mengi, $S = \{a, b, c\}$, eru 113 tengnar, með öðrum orðum að til eru 113 þriggja staka hálfgrúpur. Í greininni kemur jafnframt fram, að 75 af þessum hálfgrúpum hafa hlutleysu eða núllstak, en 38 hafa hvorki hlutleysu né núllstak. Af þeim 75 sem hafa hlutleysu eða núllstak eru 18 sem hafa bæði, 15 hafa hlutleysu en ekki núllstak og 42 hafa núllstak en ekki hlutleysu.

Í greininni eru samtals 34 útfylltar aðgerðartöflur fyrir tengnar aðgerðir, 8 öðrum töflum er lýst og aðgerðartöflur allra annarra tenginna aðgerða í þriggja staka mengi eru hliðstæðar þessum, eins og bent er á í greinnini.

Fyrir 19.570 (19.683-113) aðgerðir í þriggja staka mengi gildir tengiregla ekki.

## 7. Lokaorð

Það er ljóst að tengiregla er mun þrengra skilyrði fyrir aðgerð í mengi en önnur almenn skilyrði eins og víxlregla eða tilvist hlutleysu. Og sú spurning hlýtur að vakna hvort unnt sé að meta fjölda tenginna aðgerða í $n$ staka mengi. Niðurstöðu þessarar greinar má nota til að leiða út gróft mat á þessum fjölda á eftirfarandi hátt.

Gerum ráð fyrir aðgerð í mengi með $n$ stökum. Þá má fullyrða eftirfarandi:

(i) Gerum ráð fyrir að $(n-1) \times (n-1)$ hluttafla sé lokuð í $n \times n$ aðgerðartöflunni. Ef tengiregla gildir í hluttöflunni þá gildir hún einnig í $n \times n$ töflunni ef $n$-ta stakið (það er stakið sem er utan hluttöflunnar) er hlutleysa eða núllstak.

(ii) Gerum ráð fyrir að $3{\times}3$ hluttafla sé lokuð í $n \times n$ aðgerðartöflunni. Ef tengiregla gildir ekki í hluttöflunni þá er þar að finna mótdæmi sem einnig er mótdæmi fyrir tengiregluna í $n \times n$ töflunni.

Með því að nýta þessar staðreyndir, beita annars vegar þrepun og hins vegar einfaldri talningu, fæst að um fjölda tenginna aðgerða í $n$-staka mengi, $t_n$, gildir fyrir $n > 3$:

$$\frac{n!}{6} \cdot 113 \leq t_n \leq n^{(n^2)} - 19570 \cdot n^{(n^2-9)}$$

Til að sneiða hjá tvítalningu á aðgerðartöflum höfum við aðeins gert ráð fyrir að $n$-ta stakið sé hlutleysa (fremur en núllstak) við útreikning á neðri mörkunum. En í efri mörkunum metið lágmarksfjölda aðgerða sem eru ekki tengnar, út frá lokaðri $3{\times}3$ hluttöflu, sem er miðuð við eitt tiltekið þriggja staka hlutmengi.

Á svipaðan hátt og gert er í þessari grein (sjá kafla 5.2) má þrengja hringinn um tengnar aðgerðir í mengi með fleiri en þremur stökum. Þó hér verði ekki farið nánar út í þetta atriði má til dæmis nefna, að fyrir mengi með fjórum stökum fæst fljótlega að fjöldi tenginna aðgerða getur ekki verið meiri en $240 \cdot 4^{10}$, sem er umtalsvert betra mat en hið grófa mat hér að ofan. Þetta mætti síðan nota til að lækka efri mörkin fyrir almenna tilfellið í ójöfnunni hér að ofan.

**Summary:** The number of different binary operations on a set with $n$ elements is easy to calculate. The number of commutative operations is also easy to calculate. And the number of operations for which there exists an identity or a zero in the set can also easily be found. Finding the number of associative binary operations seems much more difficult. The main purpose of this paper is to determine the number of associative binary operations on a set with 3 elements, using algebraic concepts and not programming a computer to do the task.

The main result is that among 19,683 possible binary operations on a three-element set, $S$, the total number of associative operations is 113 exactly. Along the way 75 of those 113 associative operations are shown to arise from operations on $S$ where there exists an identity or a zero in $S$, 18 associative operations have both an identity and a zero

in $S$, 15 associative operations have an identity and not a zero in $S$, 42 associative operations have a zero and not an identity in $S$.

Several operation tables for associative operations are explicitly given and for each of the 113 associative operations its table may be viewed as described by one of the tables given in the article.

## Heimildir

[1] J.B. Fraleigh, A first course in abstract algebra, Addison-Wessley, Reading, Mass.,1999.

[2] A.H. Clifford and G.B. Preston, The Algebraic Theory of Semigroups, *Am. Math. Society*, Providence, Rhode Island, 1961.

[3] G. Frobenius, Über endliche Gruppen, Sitzungsber. *Preuss. Akad. Wiss. Berlin*, 1895, 163-194.

[4] E.H. Moore, A definition of abstract groups, *Trans. Amer. Math. Soc.* **3**, 1902, 485-492.

**Um höfundana:** Friðrik Diego er lektor í stærðfræði við Kennaraháskóla Íslands. Kristín Halla Jónsdóttir er dósent í stærðfræði við Kennaraháskóla Íslands.

Kennaraháskóli Íslands
Stakkahlíð
IS-105 Reykjavík
fd@khi.is
khj@khi.is

*Móttekin: 24. apríl 2004*