Tímarit um raunvísindi og stærðfræði
2. árg. 2. hefti 2004 – raust.is/2004/2/13

Hraðeindir og jaðarsviðsfræði

Kristján Rúnar Kristjánsson og Lárus Thorlacius

Raunvísindastofnun Háskólans

Vefútgáfa: 13. desember 2004

Ágrip – Í þessari grein er fjallað um tvívítt sviðslíkan sem kemur við sögu í strengjafræði og lýsir einnig ýmsum öðrum eðlisfræðikerfum, svo sem skammtafræði með núningi, samskeytum skammtavíra og skömmtuðum Hallhrifum. Líkanið inniheldur skalarsvið sem er skilgreint á tvívíðum fleti með jaðri. Sviðið víxlverkar við lotubundið mætti á jaðrinum en er frjálst að öðru leyti. Fyrir krítískt gildi á lotunni hefur líkanið hornrækna samhverfu og lýsir víxlverkun opinna strengja við lotubundinn bakgrunn hraðeinda. Líkanið tengist einnig hrörnun óstöðugs D-flatar í strengjafræði. Með því að notfæra sér $SU(2)$ samhverfu sem fólgin er í líkaninu má reikna ýmsar lykilstærðir án nálgana, þar á meðal litróf Hamiltonvirkjans. Eigingildin skipa sér í borða líkt og í þéttefnisfræði en borðaskipanin er óhefðbundin. Einnig má nota $SU(2)$ samhverfuna til að reikna fylgniföll ákveðinna virkja í líkaninu.

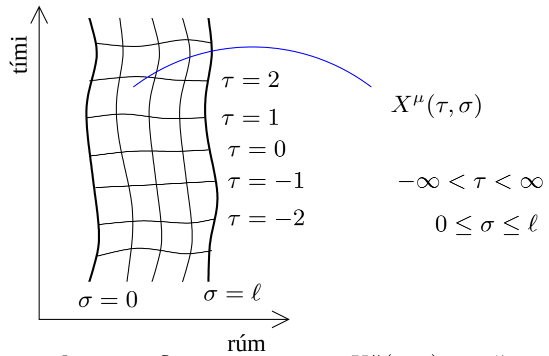
1. Inngangur

Þyngdarfræði Einsteins, öðru nafni almenna afstæðiskenningin, lýsir náttúrunni mjög vel á stórum lengdarkvarða þar sem þyngdaraflið er allsráðandi. Þetta á til dæmis við um göngu hnatta í sólkerfinu, hreyfingu vetrarbrauta og þróun alheimsins í heild sinni. Til að lýsa náttúrunni á örsmáum kvarða kemur skammtafræðin til skjalanna. Hún er undirstaða skilnings okkar á eiginleikum mismunandi efna og á því sem á sér stað inni í kjörnum frumeindanna. Allra stystu vegalengdir sem við höfum vitneskju um úr tilraunum eru kannaðar með svonefndum agnahröðlum og hið viðtekna líkan öreindafræðinnar hefur gefið mjög góða raun við að lýsa þeim ferlum sem þar fara fram. Viðtekna líkanið er samansafn af skammtasviðskenningum, sem allar eiga það sameiginlegt að leiða alveg hjá sér þyngdaraflið. Þetta veldur engum vandræðum þegar fengist er við öreindakerfi þar sem áhrif þyngdaraflsins eru hverfandi miðað við aðrar víxlverkanir milli efnisagna, en í ýmsum mjög áhugaverðum kerfum eru þau skilyrði alls ekki fyrir hendi. Má þar nefna svarthol þar sem þyngdaraflið er í aðalhlutverki en skammtafræðin kemur við sögu þegar skoðuð er útgeislun vegna Hawkinghrifa. Annað dæmi er upphaf alheimsins í Miklahvelli en á fyrstu sekúndubrotabrotum tímans er talið að áhrifa þyngdar og skammtafræði hafi gætt til jafns.

Það hefur lengi verið leitað að kenningu sem lýsir bæði þyngdaraflinu og skammtaáhrifum og sú leit stendur enn. Kenningin sem mestar vonir eru bundnar við í þessu samhengi kallast strengjafræði en í henni er smæstu einingum efnisheimsins lýst sem örsmáum strengjum. Í kenningunni birtast öreindir svo sem rafeindir, ljóseindir og kvarkar sem mismunandi sveifluhættir á einum og sama strengnum. Strengjafræði er jafnframt kenning um þyngdaraflið og felur í sér almennu afstæðiskenninguna sem markgildi þegar stórum kerfum er lýst. Þannig býður strengjafræði upp á sameinaða lýsingu allra þeirra víxlverkana sem greinst hafa í náttúrunni.

Heimsflötur strengs er tvívíður flötur, stikaður með τ og σ, sem lýsir hreyfingu strengsins í tímarúminu. Heimsflötur *opins strengs* hefur jaðar meðan heimsflötur *lokaðs strengs* er án jaðars. Hnit strengsins í $D+1$-víðu tímarúmi eru gefin með skalarsviðum $X^\mu(\tau,\sigma)$, með $\mu = 0,\ldots,D$, og framvindu kerfisins er lýst með skammtasviðsfræði á heimsfletinum. Hreyfingarjöfnur í tímarúminu svara til þess að þessi sviðsfræði feli í sér hornrækna samhverfu. Ólík hornrækin sviðslíkön svara til strengja við mismunandi aðstæður, t.d. í rafsegulsviði eða í sveigðu tímarúmi.[1]

[1] Þeim sem vilja kynna sér strengjafræði nánar er bent á eftirfarandi kennslubækur [1,2] og einnig á [3] sem er ætluð almennum lesendum.



Mynd 1. Heimsflötur opins strengs. $X^{\mu}(\tau, \sigma)$ er staðsetning í $D+1$-víðu tímarúmi með $\mu = 0, \ldots, D$.

Strengjafræði er engan veginn fullgerð kenning og mörgum grundvallarspurningum ósvarað. Eitt af því sem hefur lengi vafist fyrir mönnum er að lýsa framvindu strengja í tímaháðum bakgrunni. Slíkar lausnir eru augljóslega áhugaverðar því alheimurinn sem við búum í er ekki kyrrstæður heldur þenst út í sífellu. Af tæknilegum ástæðum er erfitt að fást við tímaháðan bakgrunn almennt en á síðustu árum hefur náðst nokkur árangur við að lýsa ákveðnum tiltölulega einföldum ferlum eins og til dæmis hrörnun óstöðugra fyrirbæra, sem kallast *Dirichletfletir* eða D-fletir. Í þessu tilfelli er tímaþróuninni lýst með ákveðinni hornrækinni sviðsfræði sem er skilgreind á tvívíðum heimsfleti strengs. Víxlverkunarmætti í tvívíðu sviðsfræðinni svarar til vaxandi hraðeindasviðs í heimsrúmi D-flatarins.[2] Í þessari grein er fengist við náskylt sviðslíkan þar sem hraðeindasviðið er reyndar óháð tíma en lotubundið í rúmi. Með fágaðri framlengingu í sviðsrúminu, svonefndum Wick-snúningi, má varpa lotubundna líkaninu yfir á tímaháða tilfellið og eitt af upphaflegum markmiðum verkefnisins var að nota slíka vörpun til að fá upplýsingar um hrörnunarferli D-flatar með útreikningum í kyrrstæðu kerfi.

[2] Hraðeindir koma fyrir bæði í skammtasviðsfræði og strengjafræði. Formlega séð eru þær öreindir með massa $m^2 < 0$ og af þeim sökum er hreyfifræði þeirra óvenjuleg. Þær virðast fara eftir rúmlægum brautum í tímarúminu, það er að segja með hraða $v > c$, og höfða því mjög til höfunda vísindaskáldskapar. Í raun svarar hraðeindasvið þó ekki til eiginlegra öreinda heldur lýsir vaxandi hraðeindasvið því þegar óstöðugt skammtakerfi leitar úr örvuðu ástandi í grunnástand sitt. Er þá talað um *þéttingu hraðeinda* (e. tachyon condensation).

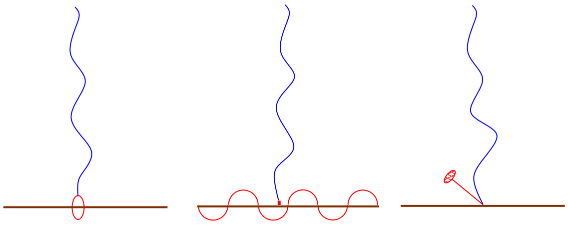
2. Líkanið

Í líkaninu sem við vinnum með víxlverkar skalarsvið $\Phi(\tau, \sigma)$ við lotubundið mætti $V(\Phi)$ á jaðri heimsflatarins en sviðið er frjálst að öðru leyti. Sviðið Φ er túlkað sem eitt af hnitum strengs í tímarúmi. Almennt svara víxlverkanir í skammtasviðsfræðinni á heimsfletinum til þess að tímarúmið sé ekki tómt heldur innihaldi tiltekin svið, eins og til dæmis rafsvið eða þyngdarsvið. Þannig svarar jaðarmætti á heimsfleti til þess að skalarsvið sé fyrir hendi í tímarúminu.[3] Ef jaðarmættið er lotubundið og lotan tekur ákveðið krítískt gildi hefur sviðsfræðin á heimsfletinum hornrækna samhverfu en það þýðir jafnframt að hreyfingarjafna skalarsviðsins í tímarúminu er uppfyllt. Þegar hreyfingarjafnan er skoðuð nánar kemur í ljós að þetta skalarsvið hefur massa $m^2 < 0$ og er því hraðeindasvið. Líkanið er þar af leiðandi hluti af því sem þarf til að lýsa víxlverkun strengja við lotubundinn bakgrunn hraðeinda, það er að segja hraðeindakristal [4], en að auki þurfa að koma til önnur skalarsvið á heimsfletinum sem lýsa hnitum strengsins hornrétt á kristalstefnuna. Ef við gerum ráð fyrir að tímarúmið sé án sveigju og innihaldi ekki annað en hraðeindakristalinn þá eru þessi umframsvið frjáls og hafa engin áhrif á hegðun Φ sviðsins. Til einföldunar verður þeim alveg sleppt í þessari umfjöllun.

Sama líkan kemur við sögu þegar ýmis önnur eðlisfræðikerfi eru könnuð, svo sem skammtafræði með núningi, samskeyti skammtavíra og skömmtuð Hallhrif, svo dæmi séu nefnd [5–8] en auk þess er líkanið áhugavert frá sjónarhóli stærðfræðilegrar eðlisfræði því það felur í sér $SU(2)$ samhverfu og fyrir tilstilli tilsvarandi straumalgebru má reikna litróf Hamiltonvirkjans og fleiri kennistærðir án nálgana en slíkt er oftast vandkvæðum bundið þegar fengist er við víxlverkandi skammtasviðskerfi.

Til að kynnast kerfinu betur skulum við fyrst skoða streng með endann festan við stöng eins og sýnt er á mynd 2. Skalarsviðið sem lýsir staðsetningu strengsins getur haft mismunandi jaðarskilyrði og fara þau eftir því hvernig endinn er festur. Ef endinn er frjáls og færist óhindraður fram og til baka eftir stönginni er um að ræða svonefnd Neumann-skilyrði en ef hann er negldur niður á ákveðnum stað eru það Dirichlet-skilyrði. Lotubundið jaðarmætti gefur eitthvað þar á milli. Þá er stöðuorka kerfisins háð því hvar endinn er

[3] Þessu skalarsviði tímarúminu má ekki rugla saman við skalarsviðið Φ á heimsfletinum sem gefur staðsetningu strengsins í tímarúminu.



Mynd 2. Lotubundið jaðarmætti gefur jaðarskilyrði sem eru millibilsástand milli Neumann- og Dirichletskilyrða.

staddur á stönginni. Ef mættið er hverfandi er endinn frjáls á stönginni og við fáum Neumann-skilyrði. Ef mættið er veikt kemst endinn tiltölulega greiðlega yfir staðbundið hágildi mættisins en eftir því sem mættið er sterkara kostar meiri orku að komast yfir hágildi. Í því markgildi að mættið verður óendanlega sterkt er endi strengsins einskorðaður við eitt af lággildum mættisins en það svarar einmitt til Dirichlet-skilyrðis.

Líkaninu er lýst með virkni

$$
\begin{aligned}
S \;=\; & \frac{1}{4\pi}\int \mathrm{d}^2 z\, \partial\Phi\bar{\partial}\Phi \\
& - \frac{1}{2}\int \mathrm{d}\tau \left(g\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Phi(0)/\sqrt{2}} + \bar{g}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Phi(0)/\sqrt{2}} \right)
\end{aligned} \tag{1}
$$

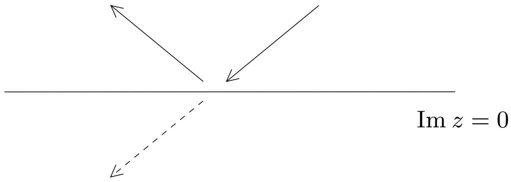
þar sem g er tvinngildur stiki sem stýrir stærð og fasa mættisfallsins. Hér er heimsflöturinn efra hálfplanið og jaðar hans er rauntalnaásinn, stikaður með τ. Ávallt má finna hornrækna vörpun sem kemur heimsfleti opins strengs á þetta form. Fyrri liðurinn í virkninni lýsir frjálsu skalarsviði á heimsfletinum en sá seinni er einskorðaður við jaðarinn og lýsir víxlverkun enda strengsins við lotubundið mætti. Lota mættisins hefur verið valin þannig að skammtasviðslíkanið búi yfir hornrækinni samhverfu, þ.e.a.s. að virknin S breytist ekki við hornrækna umstikun á σ og τ. Þetta er nauðsynlegt skilyrði til að líkanið komi að notum í strengjafræði en setur jafnframt fylgniföllum mælistærða í líkaninu strangar skorður.

3. Vinstri- og hægrisinnar

Almenn lausn á hreyfingarjöfnu fyrir frjálst tvívítt skalarsvið er summa vinstri- og hægrisinna

$$\Phi(z,\bar{z}) = \phi(z) + \bar{\phi}(\bar{z}).$$

Hér er $\phi(z)$ ótiltekið fágað fall og $\bar{\phi}(\bar{z})$ andfágað fall, sem er óháð $\phi(z)$ ef um lokaðan streng er að ræða en tengist $\phi(z)$ í gegnum jaðarskilyrði á $\Phi(z,\bar{z})$ ef átt er við opna strengi.



Mynd 3. Hægrisinna breytt í vinstrisinna með speglun.

Ef Φ uppfyllir frjáls (Neumann) jaðarskilyrði á rauntöluásnum gildir að

$$\bar{\phi}(\bar{z}) - \phi(z)\,|_{z=\bar{z}} = 0.$$

Þetta skilyrði má nota til að umrita hægrisinna í efra hálfplani sem vinstrisinna í því neðra á sambærilegan hátt og spegilhleðslur eru notaðar í rafsegulfræði. Með slíkri speglun fæst kenning sem inniheldur eingöngu fágaða vinstrisinna. Kenningin er þá jafnframt skilgreind á öllu tvinntalnaplaninu án jaðars.

Í hornrækinni skammtasviðsfræði er hentugt að vinna með svonefnd *forfrumsvið* (e. quasi-primary fields) en það eru sviðsvirkjar sem ummyndast á einfaldan hátt við hornrækna umstikun [2, 9]. Almennt má skrifa sérhvert forfrumsvið sem margfeldi vinstri- og hægrisinnaðra hluta

$$\Psi_{h,\bar{h}}(z,\bar{z}) = \psi_h(z)\bar{\psi}_{\bar{h}}(\bar{z}).$$

Eftir speglun verður $\bar{\psi}_{\bar{h}}(\bar{z})$ að vinstrisinna $\psi_{\bar{h}}(z^*)$ með fágaða vídd $\bar{h}$. Í þessum rithætti tákna bæði $\bar{z}$ og z^* samokatölu z. Munurinn er sá að $\bar{z}$ er viðfang hægrisinna $\bar{\psi}(\bar{z})$ á meðan z^* er viðfang spegil-vinstrisinna $\psi(z^*)$. Með þessu móti fæst svið sem er vinstrisinnað eingöngu og skilgreint á tvinntalnaplaninu í heild án jaðars.

Með því að beita speglun verður n-punkta fylgnifall $\langle \Psi_{h_1,\bar{h}_1}(z_1,\bar{z}_1)\ldots\Psi_{h_n,\bar{h}_n}(z_n,\bar{z}_n)\rangle$ í upphaflegu kenningunni á efra hálfplaninu að $2n$-punkta fylgnifalli $\langle \psi_{h_1}(z_1)\bar{\psi}_{\bar{h}_1}(z_1^*)\ldots\psi_{h_n}(z_n)\bar{\psi}_{\bar{h}_n}(z_n^*)\rangle$ á planinu í heild sem hægt er að reikna út með hefðbundnum aðferðum hornrækinnar sviðsfræði [9]. Nánar verður fjallað um fylgniföll í köflum 5 og 6 hér á eftir.

Það er hægt að útrýma hægrisinnum úr kenningunni jafnvel þótt lotubundna mættið sé til staðar á jaðrinum. Jaðarmættið má nefnilega umrita sem

$$-\frac{1}{2}\left(g\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\sqrt{2}\,\phi(z)} + \bar{g}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sqrt{2}\,\phi(z)} \right)\Bigg|_{\mathrm{Im}(z)=0} \tag{2}$$

þar sem aðeins vinstrisinnar koma við sögu. Þegar kemur að því að reikna fylgniföll fyrir forfrumsvið í kenninguni með jaðarvíxlverkun þarf að spegla hægrisinnum yfir í neðra hálfplanið. Þar sem sviðið Φ er frjálst annars staðar en á jaðrinum gildir að hægri- og vinstrisinna má færa í gegnum hvora aðra að vild og úr því jaðarmættið (2) inniheldur eingöngu vinstrisinna þá færast hægrisinnarnir óhindraðir yfir á neðra hálfplanið rétt eins og í frjálsu kenningunni. Áhrif víxlverkunarinnar koma síðan fram þegar reiknuð eru fylgniföll upphaflegu vinstrisinnanna í efra hálfplaninu og vinstrisinnaðra sýndarsviða í því neðra.

Virkjarnir í víxlverkuninni (2) eru straumar í vinstrisinnaðri $SU(2)$ straumalgebru

$$J_{\pm} = \mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}\sqrt{2}\phi(z)}, \qquad J_3 = \mathrm{i}\,\partial\phi(z)/\sqrt{2}. \qquad (3)$$

Þessi staðreynd gegnir lykilhlutverki við lausn líkansins [10–12].

4. Borðaskipan

Reikna má ýmsa eðlisfræðilega eiginleika þessa líkans nákvæmlega með því að hagnýta áðurnefnda $SU(2)$ samhverfu. Þar á meðal er litróf Hamiltonvirkjans sem virknin S gefur af sér.

Ef báðir endarnir eru frjálsir er einfalt að leysa hreyfingarjöfnuna fyrir $\Phi(z,\bar{z})$ með Neumann jaðarskilyrðum og finna þannig eiginsveifluhætti strengsins og tilsvarandi orkueigingildi. Hentug leið til að setja fram litrófið er að skrifa kórsummu kerfisins

$$\mathcal{Z} = \mathrm{Tr}\left[\exp(-\beta H)\right],$$

sem er í þessu tilfelli gefin með [2]

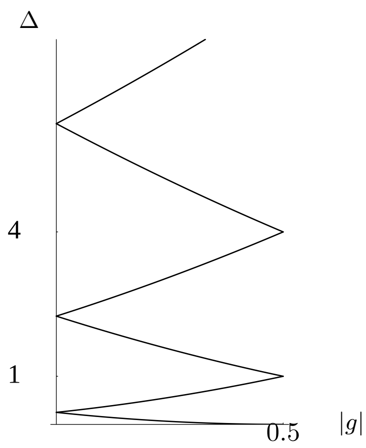
$$\mathcal{Z} = \frac{1}{\eta(q)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{2\pi} q^{p^2/2}$$

þar sem $\eta(q)$ er eta-fall Dedekinds og $q = e^{-\pi\beta/\ell}$ með ℓ sem lengd strengsins. Eta fallið

$$\eta(q) = q^{1/24} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)$$

felur í sér að óendanleg runa yfirtóna með jöfnu millibili í orku fylgi hverjum grunntón en heildið yfir p segir okkur að massamiðja strengsins geti haft hvaða skriðþunga sem er. Veldisvísirinn $p^2/2$ gefur sömu tengsl á milli orku og skriðþunga í hreyfingu massamiðjunnar og fyrir frjálsa ögn.

Mun erfiðara er að reikna orkueigingildin þegar víxlverkanir eru fyrir hendi. Að jafnaði verður að láta



Mynd 4. Leyfileg orkugildi $\Delta = \lambda(g,k)^2$ sem fall af stikanum g.

sér nægja nálgunarlausnir sem fást til dæmis með truflanareikningi en í þessu tilfelli er hægt að finna litrófið án nálgana. Með því að nýta $SU(2)$ samhverfuna má umrita víxlverkandi bóseindasviðið Φ með frjálsum fermíeindum. Orkurófið er síðan fundið með því að leysa einfalda eigingildisjöfnu fyrir fermíeindirnar. Við munum ekki sýna þessa umritun hér, enda er hún tæknilega frekar flókin [11], heldur látum nægja að segja frá útkomunni.

Skoðum fyrst tilfellið þar sem styrkur víxlverkunarinnar er sá sami á báðum endum strengsins. Kórsummuna má þá skrifa sem

$$\mathcal{Z} = \frac{\sqrt{2}}{\eta(q)} \int_{-1/2}^{1/2} \frac{dk}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} q^{(\lambda+m)^2}$$

þar sem λ tengist skriðþunganum $p = \sqrt{2}k$ með jöfnunni

$$\sin\pi(\lambda+m) = \cos\pi|g|\,\sin\pi k. \qquad (4)$$

Gildið á λ er ákvarðað með samfelldni frá $\lambda + m = k$ við $g = 0$. Orka ástandanna er $\Delta = (\lambda(k)+m)^2$ með $m \in \mathbb{Z}$.

Af jöfnu (4) sést að λ getur ekki tekið hvaða gildi sem er en það þýðir að frjálsa litrófið $\Delta = p^2/2$ hefur klofnað upp í borða og á milli þeirra opnast orkugeilar. Mynd 4 sýnir leyfileg orkugildi sem fall af stikanum $|g|$ á bilinu frá 0 og upp í $1/2$. Við tökum einnig eftir því að litrófið er óbreytt við $k \to k+n$ fyrir sérhverja heiltölu n. Þetta er kunnugleg niðurstaða úr venjulegri skammtafræði í lotubundnum bakgrunni. Jaðarmættið rýfur hliðrunarsamhverfuna og af þeim sökum er skriðþunginn ekki lengur varðveitt stærð. Hliðrun um margfeldi af lotu mættisins er þó ennþá samhverfa, og því er skriðþunginn varðveittur mod $\sqrt{2}\mathbb{Z}$.

Leyfileg gildi á $\lambda + m$ raða sér í borða af breidd $1 - 2|g|$ með miðju í sérhverri heiltölu m. Á milli borðanna eru geilar af breidd $2|g|$. Fyrir $g = 0$ fæst $\lambda + m = k$ og geilarnar hverfa. Þetta svarar til frjáls strengs með Neumann-skilyrði á báðum endum. Fyrir $|g| = 1/2$ gefur jafna (4) að $\sin \pi(\lambda + m) = 0$ svo að λ verður að vera núll. Í þessu tilfelli hafa borðarnir enga breidd en það svarar til Dirichlet-skilyrða sem negla enda strengs niður við lággildi jaðarmættisins.[4] Heila talan m ákvarðast af því hve langt er á milli lággildanna sem hvor endi strengsins um sig situr fastur í.

Borðaskipanin sem lýst er með jöfnu (4) er sértilfelli af almennara litrófi sem fæst ef við leyfum jaðarmætti af mismunandi styrk g og g' á hvorum enda. Til einföldunar getum við gert ráð fyrir því að $g, g' \in \mathbb{R}$ og $g \geq g'$. Eigingildisverkefnið sem var leyst í [11] má alhæfa þannig að það nái einnig yfir þetta tilfelli [12]. Eigingildisjafnan verður

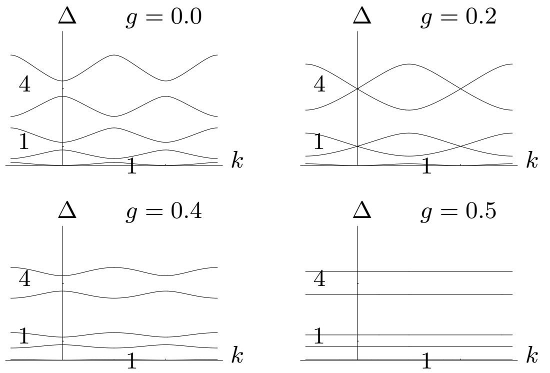
$$\sin^2 \pi\lambda = \sin^2 \pi g_- \cos^2 \pi k + \cos^2 \pi g_+ \sin^2 \pi k$$

þar sem $g_\pm = \frac{1}{2}(g \pm g')$. Í markgildinu $g' \to g$ fæst gamla lausnin aftur en þegar $g \neq g'$ koma fram breytingar á litrófinu. Sér í lagi opnast nýja geilar í miðjum borðunum eins og sýnt er á mynd 5.

Með því að breyta annaðhvort g eða g' frá núll og upp í hálfan fæst samfelld brúun á milli Neumann- og Dirichlet-jaðarskilyrða sem sýnd voru á mynd 2. Ef annar endinn er negldur niður með $g = 1/2$ er litrófið strjált með eigingildi $(m+1/2\pm g')^2$ en ef báðir endar eru frjálsir með $g = g' = 0$ er litrófið samfellt. Fyrir öll önnur gildi á g og g' skipar litrófið sér í borða. Tilfellið $g = g'$ er mjög sérstakt því þá lokast önnur hver geil.

Í hefðbundnum þéttefnisfræðikerfum minnka geilarnar með vaxandi orku og verða hverfandi þegar orkan er orðin nógu há í samanburði við orkuskalann í mættinu. Hér er önnur hegðun því bæði borðarnir og geilarnar á milli þeirra breikka með hækkandi orku. Þetta má væntanlega rekja til hornræknu samhverfunnar sem er fyrir hendi í strengjakerfinu.

[4] Athugið að það er $|g| = 1/2$ en ekki $g \to \infty$ sem svarar til Dirichlet-skilyrða og þess að endi strengsins sé negldur fastur. Þetta kann að koma spánskt fyrir sjónir en á sér sínar tæknilegu skýringar sem tengjast meðhöndlun sérgilda í kórsummunni [10].



Mynd 5. Lægstu orkuborðar fyrir mismunandi gildi á víxlverkunarföstunum. Öðrum er haldið föstum við $g' = 0.2$ en hinn tekur gildin sem sýnd eru á myndunum.

5. Fylgniföll

Fram að þessu höfum við aðeins fjallað um hreyfingu og orku eins strengs en við höfum ekki síður áhuga á að rannsaka hvað gerist þegar strengir víxlverka hver við annan, til dæmis þegar tveir strengir rekast saman. Slíku ferli er lýst með fylgniföllum ákveðinna frumsviða í sviðsfræðinni á heimsfletinum. Síðustu kaflarnir í þessari grein fjallar um nýja aðferð til að reikna slík fylgniföll fyrir mismunandi ástönd strengja sem rekast saman.

Í iðrum heimsflatarins, fjarri jaðrinum, lýsir kenningin frjálsri bóseind. Almennt svarar ástand sem ber skriðþungann p til svokallaðs *hnútvirkja* (e. vertex operator) sem er frumsvið af gerðinni $\exp(ip\Phi(z,\bar{z}))$. Rifjum upp að $\Phi(z,\bar{z}) = \phi(z) + \bar{\phi}(\bar{z})$ þannig að hnútvirkjann má skrifa sem margfeldi af fáguðum og andfáguðum virkjum. Hornrækin sviðsfræði frjálsra bóseinda (sjá til dæmis [9]) gefur að fágaði hluti hnútvirkjans hefur fágaða vídd $h = p^2/2$ og andfágaði hlutinn hefur sömuleiðis $\bar{h} = p^2/2$. Orka tilsvarandi strengs er í réttu hlutfalli við $h + \bar{h}$.

Fyrir ákveðin gildi á h, nefnilega $h = j^2$, þar sem j er heiltala eða heiltala plús hálfur, eru fyrir hendi fleiri frumsvið með sömu vídd [13]. Nýju virkjarnir $\psi_{jm}(z)$ kallast *strjálir höfuðvirkjar* (e. discrete primary operators) og mynda $SU(2)$ fjölstig sem er merkt með j og m þannig að $-j \leq m \leq j$.

Strjáll iðravirki er hnútvirki sem settur er saman úr fáguðum strjálum höfuðvirkja og öðrum andfáguðum,

$$\Psi_{j\bar{\jmath}m}(z,\bar{z}) = \psi_{jm}(z)\bar{\psi}_{\bar{\jmath}m}(\bar{z}).$$

Slíkur virki svarar til lokaðs strengs[5] og sú krafa að Φ sviðið sé lotubundið þegar farið er eina umferð eftir strengnum gefur að fágaði hluti iðravirkjans og sá andfágaði verða að bera sömu m skammtatölu, en hún ákvarðar jafnframt skriðþunga strengsins $p = \sqrt{2}m$. Tölurnar j og $\bar{\jmath}$ geta hinsvegar verið frábrugðnar hvor annari en eru þó ekki alveg óháðar. Spuni strengsins er gefinn með mismuninum $h - \bar{h} = j^2 - \bar{\jmath}^2$ og verður að vera heiltala eða heiltala plús hálfur.[6] Útfrá þessu skilyrði sést að tölurnar j og $\bar{\jmath}$ verða annaðhvort báðar að vera heiltölur eða hvor um sig heiltala plús hálfur.

Eins og áður kom fram rýfur lotubundna jaðarmættið hliðrunarsamhverfu í Φ og getur drukkið í sig skriðþunga í skömmtum af stærð $\sqrt{2}\mathbb{Z}$. Strjálu höfuðvirkjarnir bera einmitt slíkan skriðþunga og því er einkar áhugavert að skoða fylgniföll þeirra.

Í ljós kemur að áhrifum jaðarvíxlverkunarinnar á strjálan höfuðvirkja má lýsa með $SU(2)$ snúningi um horn sem ræðst af stikanum g. Callan og félagar [10] bentu fyrst á þennan snúning fyrir fylgniföll sem lýsa því hvernig einfaldar strengjaörvanir endurkastast frá jaðrinum. Aðferð þeirra byggir á því að virkjarnir $\partial\phi$ og $\bar{\partial}\bar{\phi}$, sem eru sköpunar- og eyðingarvirkjar fyrir vinstri- og hægrisinna, eru einnig straumar í $SU(2)$ straumalgebrunni (3).

Aðferðina má alhæfa [12] þannig að hún nái yfir fylgniföll allra virkja sem bera vel skilgreindar $SU(2)$ skammtatölur, en það eru einmitt strjálu höfuðvirkjarnir $\Psi_{j\bar{\jmath}m}$. Verkefnið er að reikna fylgnifall fyrir ótiltekinn fjölda strjálla iðravirkja í efra hálfplaninu. Við byrjum á að spegla öllum hægrisinnum yfir í neðra hálfplanið $\bar{\psi}_{\bar{\jmath}m}(\bar{z}) \rightarrow \psi_{\bar{\jmath}m}(z^*)$ eins og lýst var í kafla 3 og losum okkur þannig við jaðar heimsflatarins. Jaðarmættið kemur ekki í veg fyrir að þetta gangi því andfáguðu sviðsvirkjarnir $\bar{\psi}_{\bar{\jmath}m}(\bar{z})$ víxla við fáguðu straumana í (2).

Þrátt fyrir að við getum losað okkur við jaðarinn með þessum hætti og unnið eingöngu með vinstrisinnaða virkja í öllu tvinntalnaplaninu þá er víxlverkunin áfram til staðar. Hún liggur á rauntalnaásnum og er gefin með vegheildi eftir ásnum yfir $SU(2)$ straumana í (2). Lykillinn að reikniaðferð Callan og félaga í [10], og einnig að þeirri alhæfingu sem við höfum sett fram [12], er að þetta vegheildi er yfir strauma sem hafa fágaða vídd $h = 1$. Í því tilfelli má færa heildisferilinn niður í neðra hálfplanið. Ef sýndarsviðin bera $SU(2)$ skammtatölur þá tryggir $SU(2)$ straumalgebran að engir skurðir komi fram og því hægt að loka heildisferlinum um hvert sýndarsvið um sig.

Tiltekið fylgnifall er reiknað sem formleg veldaröð þar sem hver liður fyrir sig er frjálst fylgnifall sem nær til virkjanna í upphaflega fylgnifallinu ásamt mismunandi fjölda af vegheildum yfir víxlverkunina (2) eftir rauntalnaásnum. Þar sem vegheildin eru öll eftir sama ferlinum má búast við sérgildum þegar staðsetning tveggja eða fleiri virkja sem heildað er yfir er sú sama.[7] Callan og félagar fundu hentuga leið til að meðhöndla þessi sérgildi sem gerði þeim bæði kleyft að reikna almenna liði í truflanaröðinni og líka að leggja þá alla saman. Þannig gátu þeir reiknað upphaflega fylgnifallið í víxlverkandi kenningunni án nálgana. Það yrði of langt mál að hafa röksemdafærsluna eftir hér en lokaniðurstaðan er tiltölulega einföld. Einu áhrif víxlverkunarinnar eru víðfeðmur $SU(2)$ snúningur sem verkar á alla sýndarvirkja í neðra hálfplaninu.

Eins og áður sagði reiknuðu Callan og félagar eingöngu fylgniföll virkja af gerðinni $\partial\phi$ og $\bar{\partial}\bar{\phi}$. Röksemdafærslu þeirra má hinsvegar yfirfæra á almenna strjála iðravirkja (5). Áhrif víxlverkunarinnar eru eins og áður víðfeðmur $SU(2)$ snúningur á alla sýndarvirkja í neðra hálfplaninu. Slíkur snúningur verkar á strjálan höfuðvirkja með

$$\tilde{\psi}_{\bar{\jmath}m}(z^*) = \sum_{m'=-\bar{\jmath}}^{\bar{\jmath}} \mathcal{D}^{\bar{\jmath}}_{m,m'}(g)\psi_{\bar{\jmath}m'}(z^*). \qquad (5)$$

Snúningsstuðlarnir eru gefnir með

$$\mathcal{D}^{j}_{m,m'}(g) = \langle j,m|e^{i\pi(gJ_+ + \bar{g}J_-)}|j,m'\rangle \qquad (6)$$

þar sem $|j,m\rangle$ eru hefðbundin $SU(2)$ ástönd.

Fylgniföll strjálla iðravirkja má nú reikna á eftirfarandi hátt. Fyrst er andfágaða hluta sérhvers hnútvirkja speglað í fágaðan sýndarvirkja í neðra hálfplan-

[5] Hnútvirkjar sem svara til lokaðra strengja eru iðravirkjar en hnútvirkjar opinna strengja eru jaðarvirkjar, þ.e.a.s. staðsettir á jaðri heimsflatarins.

[6] Hér sem annars staðar í greininni notum við svonefndar náttúrulegar einingar þar sem $\hbar = c = 1$.

[7] Almennt koma upp sérgildi í fylgniföllum í öllum víxlverkandi skammtasviðskenningum og eitt helsta viðfangsefni skammtasviðsfræðinnar er að meðhöndla slík sérgildi þannig að þau spilli ekki notagildi kenningarinnar.

inu. Þvínæst er framkvæmdur víðfeðmur $SU(2)$ snúningur samkvæmt jöfnu (5) á hvern sýndarvirkja um sig. Að lokum er reiknað frjálst fylgnifall fyrir alla þá fáguðu virkja sem þá eru fyrir hendi, þ.e.a.s. upphaflegu fáguðu virkjana ásamt uppásnúnu sýndarvirkjunum.

Sem dæmi um fylgnifall er einfaldast að skoða einspunktsfall $\langle \Psi_{j\bar{\jmath}m}(z,\bar{z})\rangle$. Ef engin jaðarvíxlverkun er til staðar er þetta fylgnifall núll (nema fyrir $j = \bar{\jmath} = m = 0$) því skriðþungi er varðveittur. Með uppásnúnum sýndarvirkjum fæst hins vegar

$$\langle \Psi_{j\bar{\jmath}m(z,\bar{z})}\rangle = \sum_{m'=-\bar{\jmath}}^{\bar{\jmath}} \mathcal{D}^{\bar{\jmath}}_{m,m'}(g)\langle \psi_{jm}(z)\psi_{jm'}(z^*)\rangle\big|_{g=0}.$$

Frjálsa fylgnifallið getur því aðeins verið frábrugðið núlli að $m' = -m$ og $j^2 = \bar{\jmath}^2$. Einspunktsfallið í víxlverkandi kenningunni er því

$$\langle \Psi_{j\bar{\jmath}m}(z,\bar{z})\rangle = \delta_{j\bar{\jmath}}\frac{\mathcal{D}^{j}_{m,-m}(g)}{(z-z^*)^{2j^2}}$$

sem er almennt frábrugðið núlli ef $g \neq 0$. Fylgniföll sem innihalda fleiri strjála iðravirkja má reikna á sambærilegan hátt og við höfum sannreynt aðferðina með ákveðnum prófum sem tveggjapunktaföll verða að standast.

Því miður er aðferðin ekki nothæf fyrir aðra virkja en strjála höfuðvirkja því ef $h \neq j^2$ nægir $SU(2)$ snúningur ekki til að lýsa áhrifum víxlverkunarinnar.

6. Fylgniföll jaðarvirkja

Í kaflanum hér á undan sögðum við frá aðferð til að reikna fylgniföll strjálla höfuðvirkja sem staðsettir eru í iðrum heimsflatarins. Það er flóknara að finna fylgniföll höfuðvirkja sem búa á jaðrinum því þeir eru staðsettir þar sem víxlverkunin verkar og gæta þarf að fleiri sérgildum en áður. Hornrækna samhverfan setur þó öllum fylgniföllum strangar skorður sem hjálpa til við ákvörðun þeirra. Tveggjapunktaföll á jaðrinum eru til dæmis öll á forminu

$$\langle \Psi_i(x_1)\Psi_j(x_2)\rangle = \frac{G_{ij}}{|x_1-x_2|^{\Delta_i+\Delta_j}}$$

þar sem $\Delta_i(g)$ er orkan úr litrófinu sem fjallað var um í kaflanum um borðaskipan. Hinsvegar er ekki ljóst hvernig finna á stuðlana G_{ij} sem almennt eru háðir g.

Það er krefjandi óleyst verkefni að reikna fylgniföll fyrir almenna höfuðvirkja á jaðrinum en við höfum sett fram forskrift sem dugir fyrir strjála jaðarvirkja $\Psi^g_{JM}(x)$ [12]. Hávísirinn g gefur til kynna að jaðarvirkinn sé skilgreindur í kenningu þar sem víxlverkunin er til staðar. Hugmyndin er að skrifa Ψ^g_{JM} sem línulega samantekt af frjálsum jaðarvirkjum innan sama fjölstigs

$$\Psi^g_{JM}(x) = \sum_{M'=-J}^{J} h^J_{MM'}(g)\Psi^0_{JM'}(x)\,. \qquad (7)$$

Þetta er mögulegt vegna þess að vídd Ψ^g_{JM} er J^2 óháð g eins og sést af jöfnu (4) og frjálsu jaðarvirkjarnir spanna þetta hlutrúm. Stuðlarnir $h^J_{MM'}(g)$ eru hins vegar ekki ótvírætt ákvarðaðir því það er ákveðið frelsi í því hvernig virkjarnir Ψ^g_{JM} eru skilgreindir. Áhrif víxlverkunarinnar á jaðarvirkjana geta nefnilega bæði komið fram í tengslum milli jaðarvirkja og iðravirkja í kenningu með víxlverkun eða í tengslum jaðarvirkjanna við tilsvarandi jaðarvirkja í kenningu þar sem slökkt hefur verið á víxlverkuninni.

Samkvæmt forskrift okkar ber að líta fyrst á frjálsu kenninguna og finna jaðarvirkjana Ψ^0_{JM} útfrá tilsvarandi iðravirkjum. Þetta er hægt að gera á ótvíræðan hátt með vel þekktum aðferðum [9]. Til að finna áhrif víxlverkunarinnar gerum við síðan ráð fyrir því að straumarnir í jaðarvíxlverkuninni liggi á línu rétt fyrir ofan rauntöluásinn. Ef heildisferillinn er færður niður í neðra hálfplanið snýst upp á jaðarvirkjana $\Psi^0_{JM}(x)$ eins og um vinstrisinna væri að ræða og við fáum $h^J_{MM'}(g) = \mathcal{D}^J_{MM'}(g)$. Með þessu móti verða jaðarfylgniföll í víxlverkandi kenningu á eftirfarandi formi,

$$\begin{aligned}&\langle \Psi^g_{J_1M_1}(x_1)\dots\Psi^g_{J_nM_n}(x_n)\rangle \\ = &\sum_{M'_i=-J_i}^{J_i} \mathcal{D}^{J_1}_{M_1M'_1}(g)\dots\mathcal{D}^{J_n}_{M_nM'_n}(g) \\ &\langle \Psi^0_{J_1M'_1}(x_1)\dots\Psi^0_{J_nM'_n}(x_n)\rangle \qquad (8)\end{aligned}$$

sem síðan er hægt að reikna með hefðbundnum aðferðum fyrir frjálsa virkja.

Það er rétt að taka fram að þetta er alls ekki eina forskriftin sem kemur til greina. Annar möguleiki væri til dæmis að loka heildisferlinum í efra hálfplaninu en þá fengist $\Psi^g_{JM} = \Psi^0_{JM}$ og áhrif víxlverkunarinnar kæmu þess í stað öll fram í tengslum jaðarvirkjanna við iðravirkjana. Almennt séð fást mismunandi forskriftir með því að meðhöndla sérgildi í fylgniföllum á mismunandi vegu. Ein forskrift er ekki endilega réttmætari en önnur. Til dæmis geta mismunandi forskriftir fyrir fylgniföll í þyngdarfræði svarað til athugenda í mismunandi viðmiðunarkerfum. Þó er oft hægt að nota samhverfur og varðveislulögmál til að leiðsagnar í þessum efnum og forskriftin okkar hefur þann góða eiginleika að jaðarfylgniföllin í (8) varðveita skriðþunga aðeins mod $\sqrt{2}$ eins og rofin hliðrunarsamhverfa gefur tilefni til.

Þakkir: Verkefnið er styrkt af Rannsóknasjóði Vísinda- og tækniráðs, Rannsóknasjóði Háskóla Íslands og Rannsóknanámssjóði.

Heimildir

[1] B. Zwiebach, *A First Course in String Theory*. Cambridge University Press, 2004.

[2] J. Polchinski, *String theory, Vol. I. An introduction to the bosonic string*. Cambridge University Press, 1998.

[3] B. R. Greene, *The elegant universe: Superstrings, hidden dimensions, and the quest for the ultimate theory*. Norton, New York, 1999.

[4] C. G. Callan and L. Thorlacius, *Open string theory as dissipative quantum mechanics*, *Nucl. Phys.* **B329** (1990) 117.

[5] A. O. Caldeira and A. J. Leggett, *Quantum tunneling in a dissipative system*, *Ann. Phys.* **149** (1983) 374–456.

[6] M. P. A. Fisher and W. Zwerger, *Quantum Brownian motion in a periodic potential*, *Phys. Rev.* **B 32** (1985) 6190.

[7] F. Guinea, V. Hakim, and A. Muramatsu, *Diffusion and localization of a particle in a periodic potential coupled to a dissipative environment*, *Phys. Rev. Lett.* **54** (1985) 263.

[8] C. L. Kane and M. P. A. Fisher, *Transmission through barriers and resonant tunneling in an interacting one-dimensional electron gas*, *Phys. Rev.* **B 46** (1992) 15233.

[9] P. Di Francesco, P. Mathieu, and D. Senechal, *Conformal field theory*. Springer, 1997.

[10] C. G. Callan, I. R. Klebanov, A. W. W. Ludwig, and J. M. Maldacena, *Exact solution of a boundary conformal field theory*, *Nucl. Phys.* **B422** (1994) 417–448, [hep-th/9402113].

[11] J. Polchinski and L. Thorlacius, *Free fermion representation of a boundary conformal field theory*, *Phys. Rev.* **D50** (1994) 622–626, [hep-th/9404008].

[12] K. R. Kristjansson and L. Thorlacius, *c = 1 boundary conformal field theory revisited*, *Class. Quant. Grav.* **21** (2004) S1359–1366, [hep-th/0401003].

[13] V. G. Kac, *Contravariant form for infinite dimensional Lie algebras and superalgebras*, *Lecture Notes in Physics* **94** (1979) 441–445.

Um höfundana: Kristján Rúnar Kristjánsson stundar PhD nám í eðlisfræði við Háskóla Íslands. Lárus Thorlacius er prófessor í eðlisfræði við Háskóla Íslands.

Raunvísindastofnun Háskólans
Dunhaga 3
IS-107 Reykjavík
kristk@raunvis.hi.is
lth@raunvis.hi.is

Móttekin: 8. september 2004