

Sístæður straumur í skammtahringjum

Sigríður Sif Gylfadóttir og Viðar Guðmundsson

Raunvísindastofnun Háskólans

Vefútgáfa: 21. desember 2004

Ágrip – Skammtahringir eru örsní rafeindakerfi á mörkum tveggja hálfleiðandi efna. Í föstu, ytra segulsviði rennur straumur eftir hringnum, hinn svokallaði sístæði straumur. Í greininni verður fjallað um hvernig hafa má áhrif á strauminn með sterkri, tímaháðri geislun.

1. Inngangur

Síðastliðna tvo áratugi hefur áhugi á smásæjum rafeindakerfum, s.s. skammtapunktum og -hringjum, í hálfleiðurum stórukist. Í nanókerfum sem þessum er hreyfing rafeinda takmörkuð við örsní svæði á mörkum tveggja hálfleiðandi efna. Kerfin eru sögð vera í skertum víddum þar sem hluti hreyfistefna í rúminu er útilokaður. Vegna smáðar þeirra er hegðun nanókerfa stjórnað af skammtahrifum. Þannig svipar þeim um margt til atóma, en eiginleikum þeirra má stjórna með því að breyta m.a. lögun og ytra segulsviði. Rannsóknir á slíkum nanókerfum hafa leitt í ljós áður óþekkt skammtahrif sem ekki koma fram í atómum.

Í skammtahringjum er hreyfing rafeinda takmörkuð við hringferil. Þegar hringurinn er í ytra segulsviði rennur stöðugur straumur eftir hringnum, hinn svokallaði *sístæði straumur* (e. persistent current) [1, 2]. Straumurinn er lotubundið fall af segulflæðinu sem hringurinn umlykur, með lotuna $\Phi_0 = h/e$, en Φ_0 kallast segulflæðisskammtur. Segulflæðið er þó ekki skammtað, nafngiftin á uppruna sinn í rannsóknum á segulskömmtum í ofurleiðurum.

Nýlega hefur áhugi manna beinst að tímaháðum hrifum í miðsæjum rafeindakerfum [3–10]. Hér verður kannað hvernig hafa má áhrif á sístæða strauma í skammtahringjum með sterkum rafsegulpólsum.

2. Grunnástand hringins

Líkanið sem notað er hér lýsir spunalausum rafeindum sem ekki víxlverka hver við aðra. Hreyfing þeirra er bundin við einvíðan hring (þykktarlausan) í GaAs og

hitastigið er $T = 4\text{K}$. Einfölduð teikning af kerfinu er sýnd á mynd 1.

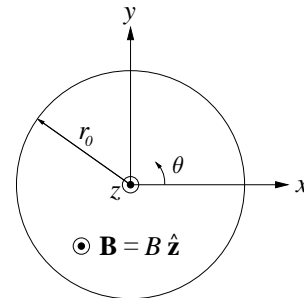
Án Coulomb víxlverkunar milli rafeinda (í mörgum tilfellum ekki gróf nálgun) er auðvelt að leysa jöfnu Schrödingers fyrir rafeindir á hringnum og finna þar með eiginástönd þeirra og orkustig. Með ytra segulsviði sem er hornrétt á sléttu hringins, $\mathbf{B} = B\hat{z}$, verður Hamiltonvirki kerfisins

$$h_0 = \frac{1}{2m^*} [\mathbf{p} + e\mathbf{A}]^2, \quad (1)$$

þar sem m^* er virkur massi rafeinda í GaAs, $\mathbf{p} = -(i\hbar/r_0)\partial/\partial\theta \mathbf{e}_\theta$ er skriðþungavirkinn, r_0 radíus hringins og \mathbf{A} er vigurmættið ($\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$). Þar sem segulsviðið er fasti og hornrétt á sléttu hringins má rita vigurmættið í samhverfum kvarða

$$\mathbf{A} = -\frac{1}{2}\mathbf{r} \times \mathbf{B} = \frac{r_0 B}{2} \mathbf{e}_\theta, \quad (2)$$

þar sem \mathbf{e}_θ er einingarrigur í stefnu hornsins. Með því að nota segulflæðið, $\Phi = \pi r_0^2 B$ og



Mynd 1. Einföld mynd af skammtahring.

segulflæðiskammtinn, $\Phi_0 = h/e$, má umrita Hamiltonvirkjann

$$h_0 = -E_0 \left[\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + 2i m_\Phi \frac{\partial}{\partial \theta} - m_\Phi^2 \right], \quad (3)$$

þar sem $m_\Phi = \Phi/\Phi_0$ er fjöldi segulflæðiskammta sem þræða hringinn, og $E_0 = \hbar^2/2m^*r_0^2$. Lausn þessarar annars stigs diffurjöfnu má með lítilli fyrirhöfn fletta upp í bókum um stærðfræðigreiningu, og reynast eiginföll rafeinda á einvíðum skammtahring vera flatar-bylgjur

$$\langle \mathbf{r} | m \rangle = \psi_m(\theta) = \frac{e^{-im\theta}}{\sqrt{2\pi r_0}}, \quad (4)$$

þar sem $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ og stöðlunarfastinn er fenginn með jaðarskilyrðinu $\psi(\theta + 2\pi) = \psi(\theta)$. Orkustiggin eru

$$\varepsilon_m = E_0 (m - m_\Phi)^2. \quad (5)$$

Eiginföll Hamiltonvirkjans eru einnig eiginföll hverfiþungavirkjans í stefnu z ássins (hér eftir verður einöngu talað um hverfiþunga og vísun í z á sinn sleppt)

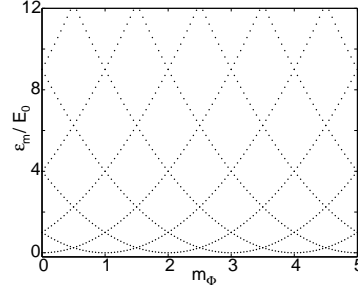
$$\hat{L}_z |m\rangle = -m\hbar |m\rangle. \quad (6)$$

Skammtatalan m tilgreinir því einnig hverfiþunga ástandsins.

Orkuróf hringins er sýnt á mynd 2 sem fall af segulflæði í gegnum hringinn. Þegar ekkert segulsvið verkar á rafeindirnar er orkurófið tvöfalt (e. degenerate), þ.e. ástönd með jafnan en andstæðan hverfiþunga hafa sömu orku. Talað er um að hægri-vinstri samhverfa sé til staðar í kerfinu. Þegar kveikt er á segulsviðinu er þessi samhverfa brotin ásamt tímasamhverfunni og tvöfeldni orkurófsins hverfur. Orka ástanda með neikvæðan hverfiþunga lækkar með tilkomu segulsviðsins en hækkar fyrir jákvæðan hverfiþunga. Með vaxandi segulsviði eykst hverfiþungi grunnástands kerfisins. Þetta lágmarkar virka hreyfiorku kerfisins. Við ákveðin gildi á segulsviði verður orkurófið þó á ný tvöfalt, en það kemur til vegna hringlögunarinnar. Orkurófið er því lotubundið, sem veldur því að aðrir eðlisfræðilegir eiginleikar hringins eru einnig lotubundir með segulsviði.

3. Sístæður straumur

Þegar hringurinn er í föstu segulsviði er heildarhverfiþungi rafeinda í z stefnu frábrugðinn núlli. Það þýðir að straumur rennur eftir hringnum. Þessi straumur er



Mynd 2. Orkuróf einvíðs skammtahring sem fall af segulflæði. Hver punktalína er þróun tiltekins orkustigs (fast gildi á skammtatölunni m) með segulflæði.

sístæður, þ.e. hann eyðist ekki með tíma, svo lengi sem líkanið inniheldur enga „viðnámsliði“ sem eyða orku úr því. Við munum nú sýna að straumurinn er í réttu hlutfalli við stigul (e. gradient) orkustiganna með segulsviði.

Við þekkjum frá rafsegulfræði að kvarðabreytingin

$$\begin{aligned} \phi' &= \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \chi}{\partial t} \\ \mathbf{A}' &= \mathbf{A} + \nabla \chi \end{aligned} \quad (7)$$

breytir ekki rafsegulsviðinu. Í skammtafræðilegri lýsingu kerfa verður fasabreyting á bylgjufallinu að fylgja kvarðabreytingunni (7) þannig að

$$\psi' = \psi e^{-i(\epsilon/\hbar)\chi}. \quad (8)$$

Með kvarðabreytingunni

$$\chi(\theta) = -\Phi \frac{\theta}{2\pi} \quad (9)$$

hverfur vigurmættið úr Schrödingerjöfnunni ($\mathbf{A}' = \mathbf{0}$) en bylgjuföllin verða

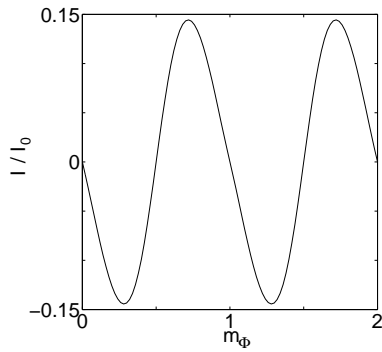
$$\psi'_m(\theta) = \psi_m(\theta) e^{im_\Phi \theta}. \quad (10)$$

Jaðarskilyrði á bylgjufallið verður því

$$\begin{aligned} \psi'_m(\theta + 2\pi) &= \psi_m(\theta + 2\pi) e^{im_\Phi(\theta+2\pi)} \\ &= \psi_m(\theta) e^{im_\Phi \theta} e^{im_\Phi 2\pi} \\ &= \psi'_m(\theta) e^{i2\pi m_\Phi}, \end{aligned} \quad (11)$$

oft nefnt snúið (e. twisted) jaðarskilyrði. Í þessum kvarða er því ljóst að við það að fara n hringi öðlast bylgjufall rafeindar fasann $e^{in2\pi m_\Phi}$. Vegna þessa má líkja hringnum við óendanlega, lotubundna kristalla-grind í einni vídd, þar sem grindarfastinn er ummál hringins, L , og Bloch bylgjuvigurinn er

$$k_m = \frac{2\pi}{L} \frac{\Phi}{\Phi_0}. \quad (12)$$



Mynd 3. Straumur eftir hringnum sem fall af segulflæði. Straumurinn er gefinn í einingunni $I_0 = e\hbar/m^*r_0$.

Hraði rafeindar í ástandi $|m\rangle$ er gefinn með

$$v_m = \frac{1}{\hbar} \frac{\partial \varepsilon_m}{\partial k_m} = \frac{L}{e} \frac{\partial \varepsilon_m}{\partial \Phi}. \quad (13)$$

Ástandið ber því straum sem nemur

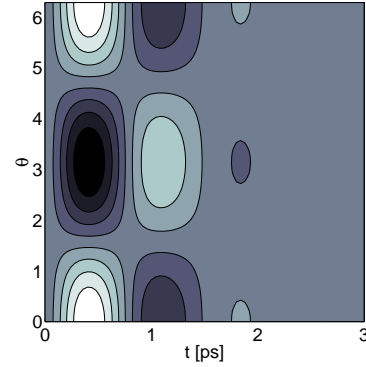
$$I_m = -\frac{ev_m}{L} = -\frac{\partial \varepsilon_m}{\partial \Phi}. \quad (14)$$

Straumurinn er í réttu hlutfalli við neikvæðan stigulorkustigsins með segulflæði. Heildarstraumurinn sem rennur eftir hringnum er

$$I = \sum_m f(\varepsilon_m) I_m = -\sum_m f(\varepsilon_m) \frac{\partial \varepsilon_m}{\partial \Phi}, \quad (15)$$

þar sem $f(\varepsilon_m)$ er sætni ástandsins m .

Sístæði straumurinn er afleiðing þess að segulsviðið brýtur hægri-vinstri samhverfu hringins. Án segulsviðs er sætni ástandanna $|m\rangle$ og $| -m\rangle$ jöfn. Þessi ástönd bera jafnan straum en í andstæðar stefnur og því verður heildarstraumurinn hverfandi. Þegar kveikt er á segulsviði lækka ástönd með neikvæðan hverfþunga ($m > 0$) í orku og sætni þeirra eykst því á kostnað ástanda með jákvæðan hverfþunga og straumur rennur eftir hringnum. Á mynd 3 má sjá strauminn sem fall af segulflæði þegar ein rafeind er á hringnum. Straumurinn er lotubundinn í segulflæði með lotuna Φ_0 . Þetta er afleiðing af lotubundnu orkurófi. Við hálf- og heiltölugildi m_Φ , þ.e. þegar segulflæðið er hálf- eða heiltölumargfeldi Φ_0 , er orkurófið tvöfalt og kerfið er hægri-vinstri samhverft. Sætni ástanda með jafna orku er sú sama, en stigullorkustiganna með segulflæði öfugur. Því bera ástöndin jafnan straum sinn í hvora áttina, og heildarstraumurinn verður hverfandi.



Mynd 4. Rúmdreifing og tímaþróun truflunar sem hringurinn verður fyrir. Dökk svæði hafa neikvæð mættisgildi og ljós svæði jákvæð. Hér er $V_0=100E_0=0.29$ eV, $\hbar\omega_1=0.658$ meV, $\hbar\omega=2.63$ meV og $\Gamma=2$ /ps.

4. Tímaháð truflun

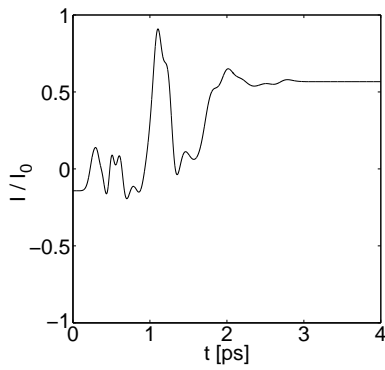
Við höfum séð að skammtahringur í ytra segulsviði ber sístæðan straum. Nú munum við kanna hvernig hægt er að hafa áhrif á strauminn með tímaháðri truflun. Truflunin verkar í mjög stuttan tíma, nokkrar picosekúntur, og er tiltölulega sterk. Truflunin hefur rúmdreifingu sem svipar til tvíþólgeislunar og tíðni hennar er á THz sviðinu. Henni er lýst með

$$V(t) = V_0 W(t) \cos \theta \quad (16)$$

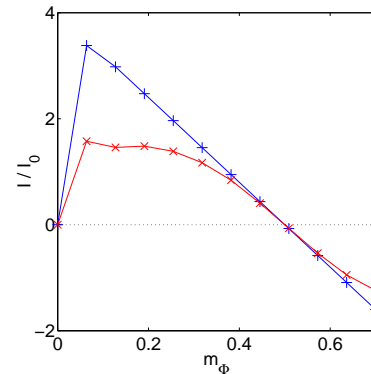
$$W(t) = e^{-\Gamma t} \sin(\omega_1 t) \sin(\omega t) \Theta(\pi - \omega_1 t),$$

þar sem Θ er Heaviside tröppufallið. Veldisvísisþátturinn takmarkar líftíma truflunarinnar og hornaföllin tryggja það að hún byrjar í núlli. Mikilvægt er að athuga að rúmdreifing truflunarinnar hefur hægri-vinstri samhverfu. Truflunin er sýnd á mynd 4. Lesendum sem hafa áhuga á frekari útfærslu tímaháðra reikninga er bent á meistaritgerð fyrri höfundar [10].

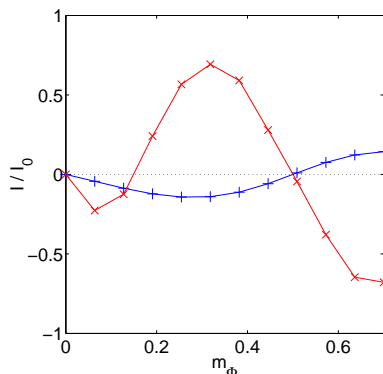
Eins og við er að búast sveiflast gildi straumsins ört þegar truflunin verkar á kerfið, sjá mynd 5 fyrir eina rafeind á hringnum. Um leið og truflunin deyr út nær straumurinn þó sístæðu gildi, og er það frábrugðið upphafsgildinu. Í líkaninu er ekki gert ráð fyrir orkueyðslu. Þannig er orku dælt inn í kerfið, það kemst í örvað ástand og dvelur þar að eilífu. Á mynd 6 eru gildi upphafs- og lokastraums sýnd sem fall af segulflæði. Fyrir veikt segulsvið er breytingin lítil, en þegar segulsviðið nær $m_\Phi \sim 0.15$ breytist stefna straumsins og hefur hann andstæða stefnu við grunnástandsstrauminn. Við $m_\Phi = 0.5$ er enginn straumur á hringnum jafnvel eftir að kerfið hefur verið örvað. Ástæða þess



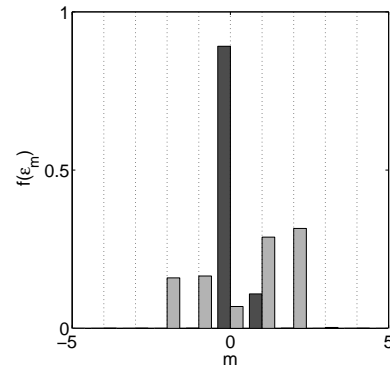
Mynd 5. Straumur sem fall af tíma fyrir eina rafeind á hringnum. Segulflæði er $m_\Phi=0.255$ ($B=1.71$ T).



Mynd 7. Straumur í grunnástandi átta rafeinda á hring (+) ásamt örvuðum straumi (x)



Mynd 6. Örvaður straumur (x) og grunnástands–straumur (+) fyrir eina rafeind á hringnum, sem fall af segulflæði.



Mynd 8. Sætni orkulægstu eiginástanda hringins fyrir og eftir truflun. Á hringnum er ein rafeind og segulflæðið er $m_\Phi = 0.25$. Sætni í grunnástandi er sýnd með dökkgráum súlum, en sætni í örvuðu ástandi með ljósgráum, við hægri hlið þeirra fyrri.

er, eins og áður hefur verið nefnt, að við þessi segulflæðisgildi eyðast gangstæðir straumar fullkomlega. Því hefur það engin áhrif að örva kerfið þannig að orkuhærri ástönd séu setin. Við þessi gildi á segulflæði brýtur segulsviðið ekki hægri-vinstri samhverfu hringins, og þar sem truflunin er einnig samhverf er ekki hægt að örva straum.

Straumörvunin er háð fjölda rafeinda á hringnum. Á mynd 7 eru niðurstöður fyrir 8 rafeindir sýndar. Hér verður straumurinn veikari eftir örvun og stefna hans sú sama og í grunnástandi. Eftir því sem rafeindum á hringnum fjölga þarf meiri orku (sterkari örvun) til að koma kerfinu í örvað ástand með straum sem er mjög frábrugðinn sístæða straumnum.

Rafsegulpúlsinn dælir orku inn í rafeindakerfið og hringur því úr jafnvægi. Straumurinn breytist því truflunin breytir sætni ástanda þannig að samsetning þeirra verður önnur en í grunnástandi. Hvert ástand ber mismunandi sterkan straum og því verður straumurinn eft-

ir örvun annar en í grunnástandi. Á mynd 8 er sætni orkulægstu ástanda sýnd, fyrir og eftir truflun.

5. Lokaorð

Einvíðir skammtahringir eru tiltölulega einföld kerfi sem þó búa yfir markverðum eiginleikum. Einn þeirra, sem hefur verið umfjöllunarefni hér, er sístæði straumurinn. Þegar hringurinn er í grunnástandi í föstu, ytra segulsviði ber hann straum sem ekki eyðist með tíma. Straumurinn breytist lotubundið með styrk segulsviðsins.

Þegar hringurinn er örvaður með sterkri, tímaháðri truflun má breyta gildi og jafnvel stefnu straumsins. Það er þó háð því að segulsviðið sé til staðar, því nauðsynlegt er að brjóta hægri-vinstri samhverfu hringins til að hann geti borið straum.

Heimildir

- [1] M. Büttiker, Y. Imry, and R. Landauer, *Phys. Lett. A* **96**, 365 (1983).
- [2] R. A. Webb, S. Washburn, C. P. Umbach, and R. B. Laibowitz, *Phys. Rev. Lett.* **54**, 2696 (1985).
- [3] C. S. Tang and C. S. Chu, *Phys. Rev. B* **53**, 4838 (1996).
- [4] C. S. Tang and C. S. Chu, *Phys. Rev. B* **60**, 1830 (1999).
- [5] S. Komlyama, O. Astafiev, V. Antonov, T. Kutsuwa, and H. Hirai, *Nature* **403**, 405 (2000).
- [6] V. Gudmundsson, C. S. Tang, and A. Manolescu, *Phys. Rev. B* **67**, 161301(R) (2003).
- [7] V. Gudmundsson, C. S. Tang, and A. Manolescu, *Phys. Rev. B* **68**, 165343 (2003).
- [8] S. S. Gylfadóttir, V. Gudmundsson, C. S. Tang, and A. Manolescu, *Cond-Mat/0309661* (2003).
- [9] S. S. Gylfadóttir, M. Nita, V. Gudmundsson, and A. Manolescu, *Cond-Mat/0402582* (2004).
- [10] S. S. Gylfadóttir, Master's thesis, Háskóli Íslands (2004), <http://www.raunvis.hi.is/reports/2004/RH-08-2004.html>.

Summary: In an external magnetic field a quantum ring displays a nondecaying (persistent) current. It appears as the magnetic field breaks the left/right symmetry of the system, i.e. the occupation of states of angular momentum antiparallel to the magnetic field increases and as a result a net current flows along the ring. The energy spectrum of the one-dimensional quantum ring is periodic in the magnetic field with a period of the flux quantum, Φ_0 . The persistent current is proportional to the negative slope of the energy levels and is thus also periodic.

When the ring is subject to a strong, time-dependent perturbation in the THz range the current fluctuates rapidly, but reaches a constant value immediately when the perturbation is turned off (no energy dissipation is included in the model presented herein). After excitation the current is different from the ground state persistent current due to a modified occupation of the single electron states. The response is strongly dependent on the number of electrons on the ring as well as the magnetic field. When the system is left/right symmetric the perturbation cannot induce a current since the occupation remains symmetric with respect to the angular momentum.

Um höfundana:

Sigríður Sif Gylfadóttir er doktorsnemi við eðlisfræðideild Tækniháskólans í Helsinki. Hún lauk B.S. prófi í jarðeðlisfræði 2001 og M.S. prófi í eðlisfræði 2004 frá Háskóla Íslands. Viðar Guðmundsson er prófessor í eðlisfræði við Háskóla Íslands.

Raunvísindastofnun Háskólans
Dunhaga 3, IS-107 Reykjavík
ssg@raunvis.hi.is, vidar@raunvis.hi.is

Móttækin: 1. sept. 2004