Tímarit um raunvísindi og stærðfræði
1. árg. 2. hefti 2003 – raust.is/2003/2/12

Hagfræði og tölfræði fjármálamarkaða

Helgi Tómasson

Háskóla Íslands

Vefútgáfa: 30. október 2003

Ágrip – Hér verður rakið lauslega hvernig stærðfræði tengist hagfræði. Nefndir eru nokkrir Nóbelsverðlaunahafar í hagfræði sem notað hafa stærðfræði í rannsóknum sínum. Hagfræði fjármálamarkaða hefur notið mikils góðs af stærðfræði. Tölfræðileg vandamál um hvernig skuli túlka mælingar á fjármálamörkuðum eru reifuð og lýst er greiningu á gögnum af íslenskum markaði.

1. Inngangur

Stærðfræði er mikilvægt hjálpargrein í hagfræði. Margir hagfræðingar hafa notað rökhyggju og tæknileg verkfæri stærðfræðinnar við að setja fram kenningar um hagkerfið. Þetta sést glöggt ef farið er yfir rannsóknir Nóbelsverðlaunahafa í hagfræði. Lítum á nokkra Nóbelsverðlaunahafa og rökstuðning Nóbelnefndar:

- **1970**, Paul A. Samuelsson, for the scientific work through which he has developed static and dynamic economic theory and actively contributed to raising the level of analysis in economic science.
- **1971**, Simon Kuznetz, for his empirically founded interpretation of economic growth which has led to new and deepened insight into the economic and social structure and process of development.
- **1980**, Lawrence R. Klein, for the creation of econometric models and the application to the analysis of economic fluctuations and economic policies.
- **1983**, Gerard Debreu, for having incorporated new analytical methods into economic theory and for his rigorous reformulation of the theory of general equilibrium.
- **1985**, Franco Modigliani, for his pioneering analyses of saving and of financial markets.
- **1989**, Trygve Haavelmo, for his clarification of the probability theory foundations of econometrics and his analyses of simultaneous economic structures .
- **1990**, Harry M. Markowits, H. Merton Miller og William F. Sharpe, for their pioneering work in the theory of financial economics.
- **1995**, Robert E. Lucas jr, for having developed and applied the hypothesis of rational expectations, and thereby having transformed macroeconomic analysis and deepened our understanding of economic policy.
- **1997**, Robert C. Merton og Myron S. Scholes, for a new method to determine the value of derivatives.
- **1998**, Amartya Sen, for his contributions to welfare economics.
- **2000**, James. J. Heckman og Daniel L. MacFadden, for his development of theory and methods for analyzing selective samples (Heckman), for his development of theory and methods for analyzing discrete choice (McFadden).
- **2001**, George A. Akerlof, Michael A. Spence og Joseph E. Stiglitz, for their analyses of markets with asymmetric information.

Þetta er tekið orðrétt af heimasíðu Nobel stofnunarinnar, http://www.nobel.se. Hinir tilgreindu hafa allir notað stærðfræði í rannsóknum sínum. Sumir mjög mikið eins og t.d. Debreu. Nokkrir hafa unnið mikið með aðferðafræði fyrir empírísk gögn svo sem, Klein, Haavelmo, Heckman og McFadden sem hafa allir unnið við þróun og notkun á tölfræðiaðferðum. Modigliani, Markowitz, Miller, Sharpe, Merton og Scholes, sem hafa fengið verðlaun fyrir fjármálafræði hafa allir notað stærðfræði mikið. Fræði Merton og Scholes um afleiðuviðskipti á fjármálamörkuðum eru byggð á háþróaðri líkindafræði.

Í upptalningunni hér á undan er stærðfræði ráðandi hjá flestum og tölfræði hjá nokkrum. Meðal hefða í hagnýtri tölfræði má nefna „biometrics” og „econometrics”. Þegar „Econometric Society” var stofnað í kringum 1930 var það meðal annars fyrir áhrif frá landbúnaðarhagfræðingum sem vissu af þróun tölfræði í landbúnaði. Líkön og aðferðir í þessum hefðum skarast víða, t.d. er í rökstuðningi Nóbelnefndar um MacFadden og Heckman sagt frá aðferðum sem margir kannast við úr „Cox-regression” fyrir ályktanir um áhrifaþætti á lífslíkur [6].

Hér á eftir verður gerð stutt grein fyrir vinnu höfundar við þróun tölfræðilegra aðferða til greiningar gagna sem safnast við starfsemi fjármálamarkaða. Það hreyfimynstur sem notast verður við eru slembnar diffurjöfnur, hið sama og notað er í t.d. [2, 11]. Til að geta hagnýtt sér aðferðir [2, 11] er nauðsynlegt að hafa mat á ákveðnum staðalfrávikum. Einnig er meðal viðfangsefna að meta fylgnistuðla milli verðbreytinga eigna, í þessu tilfelli hlutabréfa á markaði. Það sem einkennir slíka markaði er að viðskiptin með eignirnar eiga sér ekki stað samtímis. Venjulegar aðferðir við mat á fylgnistuðlum eiga því ekki við, en slíkir fylgnistuðlar eru áhugaverðir, t.d. til samsetningar á fjárfestingakörfum þannig að áhætta verði sem minnst. Vel þekkt dæmi um slík eru CAPM (Capital-Asset-Pricing-Model), [13, 12, 11]. Þar sem að viðskiptin eiga sér ekki stað samtímis, þarf raunhæft líkan að taka tillit til tímans sem líður milli viðskipta.

2. Saga

Vísindamenn hafa lengi haft gagn af að skilgreina líkön af fyrirbærum umhverfisins. Rökræn greining slíkra líkana getur haft mikla þýðingu fyrir skilning á viðkomandi fyrirbærum. Slíkar hugleiðingar geta leitt til beinna hagnýtra niðurstaðna og einnig hafa heilsteyptar stærðfræðigreinar orðið til á grundvelli slíkra líkana. Dæmi um það þegar saman hefur fléttast mikil stærðfræði og hagnýt fræði er fyrirbæri sem kallað hefur verið Brown-hreyfing. Upphafið má rekja til 19. aldar þegar skoskur líffræðingur R. Brown [5] var að lýsa hreyfimynstri agna sem hann sá í smásjá. Hann taldi að ferill agnar væri í ákveðnum skilningi óspáanlegur. Sams konar óspáanleika í hreyfimynstri taldi Bachelier [1] vera nauðsynlegan til að lýsa verðbreytingum eigna á skilvirkum markaði. Einstein [7] taldi sig þurfa sams konar hugtak til að lýsa hreyfingum atóma og mólekúla. Það var hins vegar ekki fyrr en í kringum 1920 að Wiener [16] tókst að sýna stærðfræðilega fram á tilvist svona ferlis, Wiener-ferlisins eða Brown-hreyfingar. Þeir sem læra líkindafræði nú á dögum geta hins vegar auðveldlega sannfært sig um tilvist Wiener ferlis með því að beita setningu Kolmogorovs, sjá t.d. Brockwell og Davis [4]. Wiener-ferli, sem lýsir ákveðnu formi af óspáanleika, uppfyllir:

$$
\begin{aligned}
W(0) &= 0, && (1)\\
W(t) &\text{ er samfelldur ferill með líkunum } 1, && (2)\\
W(t_2) - W(t_1) &\quad \text{er óháð} \quad W(t_4) - W(t_3), && (3)\\
E(W(t_2) - W(t_1)) &= 0 \quad \text{og} && (4)\\
V(W(t_2) - W(t_1)) &= t_2 - t_1 && (5)\\
\text{ef} &\quad t_1 < t_2 < t_3 < t_4
\end{aligned}
$$

Hægt er að sanna að $W(t)$ er normaldreift með væntanlegt gildi 0 og dreifni í hlutfalli við t. Fjármálamarkaðir einkennast af óvissu um framtíðina og við stærðfræðilega greiningu á slíkri óvissu er nauðsynlegt að hafa vel skilgreint hvað við er átt með óvissu. Í jöfnum (1-3) felst einnig að ferill $W(t)$ er samfelldur og hvergi diffranlegur með líkunum 1. Það er e.t.v. hægt að efast um réttmæti þess eiginleika, t.d. væri hægt að hugsa sér að stökk kæmi í ferilinn.

Stærðfræðingum er tamt að lýsa hreyfimynstri með diffurjöfnum. Það flækir málið hér að gera þarf ráð fyrir óvisssu. Nálgast má vandann með notkun á slembnum diffurjöfnum (e. stochastic differential equation). Slíkar jöfnur eru oftast settar fram á eftirfarandi hátt:

$$
dS(t) = \mu(S(t), t)dt + \sigma(S(t), t)dW(t) \qquad (6)
$$

Í jöfnu (6) táknar $S(t)$ verð eignar á tíma t og $dW(t)$ er slembni þáttur verðbreytingarinnar á tímabili dt. Föllin $\mu(S(t), t)$ og $\sigma(S(t), t)$ er stuðlar sem vega saman fyrirsjáanlegan þátt og ófyrirsjáanlegan þátt. Hið ófyrirsjáanlega er táknað með $dW(t)$ sem stundum er nefnt hvítur hávaði (e. white noise) í samfelldum tíma. Ekki er hægt að skilgreina fyrirbærið $dW(t)$ og hefur það því aðeins táknræna merkingu. Þ.e. jafna

(6) er í raun skrifmáti fyrir tegurjöfnuna

$$S(t) = S(0) + \int_0^t \mu(S(u), u)du + \int_0^t \sigma(S(u), u)dW(u) \quad (7)$$

Seinni liðurinn í jöfnu (7) er slembið tegur, Ito-tegrið. Nákvæmar skilgreiningar um slembnar diffurjöfnur má t.d. sjá í Øksendal [17].

Í hagnýtri fjármálastærðfræði eru oft valin einföld form á föllin $\mu(S(t), t)$ og $\sigma(S(t), t)$, t.d. $\mu(S(t), t) = \mu S(t)$ og $\sigma(S(t), t) = \sigma S(t)$ þar sem μ og σ eru jákvæðar rauntölur. Það form er stundum nefnt „Geometric-Brownian-Motion" (GBM). Ef $S(t)$ fylgir GBM þá má sjá með Ito-lemmu að

$$d\log(S(t)) = \mu^* dt + \sigma^* dW(t) \quad (8)$$

sem gengur undir nafninu „Brownian-motion-with-drift". Í jöfnu (8) eru μ^* og σ^* föll af μ og σ í textanum hér fyrir ofan. Þau föll eru reiknuð með Itolemmu sem er keðjuregla fyrir slembnar diffurjöfnur. Dreifing $S(t)$ er log-normal og $\log(S(t))$ er normaldreift. Breytingu í $\log(S(t))$ má túlka sem hlutfallslega breytingu í $S(t)$ í tíma, þ.e., $E(\log(S(t)) - \log S(s)) = \mu(t-s)$ og $V((\log(S(t)) - \log S(s)) = \sigma^2(t-s)$. Ávöxtun er iðulega mæld hlutfallslega (í prósentum) og skýrir það að hluta vinsældir GBM.

Meðal markmiða fjárfesta er að forðast áhættu. Fjárfestar vilja sem hæsta ávöxtun að gefinni ákveðinni áhættu eða óvissu. Fjárfestar vilja einnig sem minnsta áhættu að gefinni ákveðinni ávöxtun. Nóbelsverðlaunahafinn Markowitz [10] setti fram með skipulegum hætti fræði sem tengja saman stöðugleika og ávöxtun. Algengt er að nota staðalfrávik ávöxtunar sem mælikvarða á stöðugleika. Regla fyrir dreifni(e. variance) summu tveggja hendinga er:

$$V(X_1 + X_2) = V(X_1) + V(X_2) + 2\,\mathrm{Cov}(X_1, X_2) \quad (9)$$

Ef $\mathrm{Cov}(X_1, X_2)$ er neikvæð stærð þá er dreifni summunnar minni en summa dreifni hendinganna sem mynda summuna. Það er áhugavert að velja eignakörfu þannig að karfan sé sem stöðugust og því æskilegt að neikvæð fylgni sé á milli einstakra þátta körfunnar. T.d. ef einungis væri um tvær eignir að ræða mætti koma dreifni niður í núll ef fylgni X_1 og X_2 væri -1. Þessi atriði eru grundvöllur CAPM (e. Capital-Asset-Pricing-Model), [13, 9, 12].

Til að geta beitt líkönum byggðum á ofangreindum hugmyndum þarf að þekkja ákveðna stuðla, μ, σ, o.s.frv. Í raunveruleikanum eru þessir stuðlar óþekktir og þarf að meta þá út frá gögnum. Verksvið tölfræðinga er að álykta um óþekkta hluti líkana út frá mælingum. Hér á eftir verður lýst ákveðinni aðferð við að meta fylgni milli ávöxtunar eigna á markaði. Gengið er út frá GBM líkani að viðbættu mælisuði sem hugsast má að sé tilkomið vegna þess að þegar viðskipti eiga sér stað milli manna á markaði er það afleiðing samninga. Kaupandi reynir að fá verð lækkað og seljandi reynir að fá verð hækkað. Það er því eðlilegt að mælt verð sé ekki „rétt" verð. Viðskipti með tvær eignir á markaði eiga sér oftast ekki stað samtímis og því ekki hægt að nota venjulegar aðferðir við mat á fylgni. Þetta er fyrst og fremst vandamál þegar viðskipti eru strjál eins og t.d. á íslenska markaðnum. Aðferðum til að nálgast þennan vanda hefur verið nánar lýst í [14, 15]. Áhugaverðar stærðir á fjármálamörkuðum eru því $\sigma_1^2 = V(X_1)$, $\sigma_2^2 = V(X_2)$ og $\rho\sigma_1\sigma_2 = \mathrm{Cov}(X_1, X_2)$.

3. Mat á fylgni tveggja slembiferla

Gerum ráð fyrir tvívíðu kerfi af Wiener-ferlum og að fylgni milli hnita sé ρ:

$$\begin{bmatrix} dX_1(t) \\ dX_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1 dW_1(t) \\ \sigma_2 dW_2(t) \end{bmatrix}, \quad (10)$$

$$\begin{aligned} E(dW_1(t)) &= E(dW_2(t)) = 0, \\ E(dW_1^2(t)) &= E(dW_2^2(t)) = dt, \quad \text{og} \\ E(dW_1(t)dW_2(t)) &= \rho dt. \end{aligned}$$

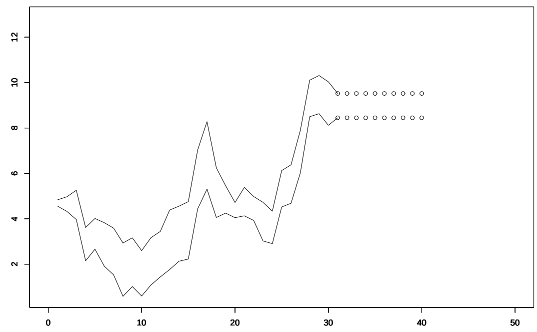
Besta spá $X_1(t)$ og $X_2(t)$ við tíma t gefið gildin við tíma $s < t$ er:

$$\begin{aligned} E(X_1(t)|X_1(s)) &= X_1(s) \quad \text{og} \\ E(X_2(t)|X_2(s)) &= X_2(s) \quad \text{fyrir } t > s \end{aligned} \quad (11)$$

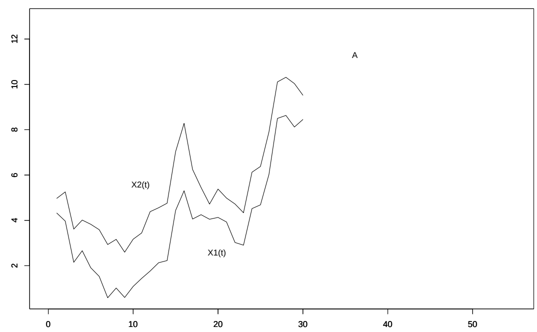
Ef við nú höfum einungis mælingu á $X_1(t)$ þá er besta spá fyrir $X_2(t)$, $t > s$, gefið $X_1(s), X_1(t), X_2(s)$:

$$E(X_2(t)|X_1(t), X_1(s), X_2(s)) = X_2(s) + \rho\sigma_2/\sigma_1(X_1(t) - X_1(s)). \quad (12)$$

Þessu er nánar lýst á myndum 1-3. Mynd 1 gefur dæmi um hvernig tvö háð Wiener-ferli geta þróast.



Mynd 1. Tvö háð Wiener-ferli mæld upp að t=30, besta spá er síðasta gildi.



Mynd 2. Tvö háð Wiener-ferli og ný mæling, $X_2(35) = A$.

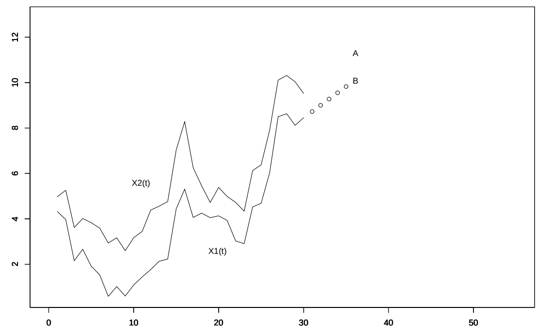
Mynd 1 sýnir mælt ferli upp að tíma 30 og síðan bestu spá eftir það. Mynd 2 sýnir að ný mæling á X_2, A, hefur bæst við á tíma 35. Mynd 3 sýnir hvernig skilyrt spá fyrir X_1 hefur breyst við þessar nýju upplýsingar.

Sé gert ráð fyrir að X_1 sé mældur á tímum t_1 og t_2 og X_2 á tímum s_1 og s_2 þá er samdreifni(e. covariance)-fylki $(X_1(t_1), X_1(t_2), X_2(s_1), X_2(s_2))$ gefið með:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1^2 t_1 & \Sigma_{AB} \\ \Sigma'_{AB} & \Sigma_{BB} \end{bmatrix} \quad \text{þar sem} \tag{13}$$

$\Sigma_{BB} =$

$$\begin{bmatrix} \sigma_1^2 t_2 & \rho\sigma_1\sigma_2(t_2 \wedge s_1) & \rho\sigma_1\sigma_2(t_2 \wedge s_2) \\ \rho\sigma_1\sigma_2(t_2 \wedge s_1) & \sigma_2^2 s_1 & \sigma_2^2(s_1 \wedge s_2) \\ \rho\sigma_1\sigma_2(t_2 \wedge s_2) & \sigma_2^2(s_1 \wedge s_2) & \sigma_2^2 s_2 \end{bmatrix}$$



Mynd 3. Tvö háð Wiener-ferli, skilyrt spá á $X_2(t)$, $B = E(X_1(35)|X_2(35) = A)$.

og

$\Sigma_{AB} =$

$$\begin{bmatrix} \sigma_1^2(t_1 \wedge t_2) & \rho\sigma_1\sigma_2(t_1 \wedge s_1) & \rho\sigma_1\sigma_2(t_1 \wedge s_2) \end{bmatrix}$$

þar sem $(t_1 \wedge t_2) = \min(t_1, t_2)$. Nota má jöfnu (13) til að reikna bestu spá fyrir $X_1(t_1)$ gefið $X_1(t_2), X_2(s_1), X_2(s_2)$:

$$\begin{aligned} &E(X_1(t_1)|X_1(t_2), X_2(s_1), X_2(s_2)) \\ &\qquad = \Sigma_{AB}\Sigma_{BB}^{-1}(X_1(t_2), X_2(s_1), X_2(s_2))' \end{aligned} \tag{14}$$

Hér táknar Σ_{AB} röð 1 og dálk 2-4 í fylkinu í jöfnu (13) og Σ_{BB} hlutfylkið sem saman stendur af röð 2-4 og dálk 2-4. Ljóst er því að fyrir gefin gildi á σ_1, σ_2 og ρ má reikna bestu spá út frá fortíðinni. Því er hægt að skilgreina viðeigandi markfall og hámarka með tilliti til σ_1, σ_2 og ρ. Þannig má fá tölfræðilegt mat á σ_1, σ_2 og ρ samanber t.d. venjulega aðhvarfsgreiningu. Ljóst er að hægt er að útvíkka þetta fyrir hærri víddir. Formúlur verða þó mun flóknari í slíkum tilfellum.

4. Hagnýting á íslenskum hlutabréfagögnum

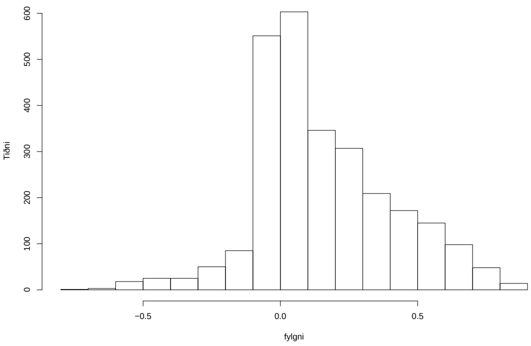
Á áratugnum 1991-2001 hefur íslenskur hlutabréfamarkaður náð að festa sig í sessi. Á miðju ári 2001 voru um það bil 80 fyrirtæki skráð á Verðbréfaþing Íslands. Höfundur hefur notið styrks frá Rannís og Rannsóknarframlagi bankanna til rannsóknar á gögnum um hlutabréfaviðskipti á Verðbréfaþingi Íslands. Aðferðum sem þróaðar hafa verið er lýst nánar í [15, 14]. Gengið er út frá margvíðu líkani líkt og lýst er í kafla 3 hér á undan. Gert er ráð fyrir því að á hverjum tíma sé vektor $\boldsymbol{\alpha}(t)$ þar sem hnit númer i inniheldur logra gengis í fyrirtæki i. Viðskipti eiga sér stað á tímapunktum $t_1, t_2, \ldots$ og fæst þá mæling á einni hnit vektorsins $\boldsymbol{\alpha}(t)$. Gert er ráð fyrir að ákveðnu suði ε_i hafi verið bætt við mælinguna. Þessu suði er ætlað að endurspegla þá staðreynd að viðskipti eru afleiðing af samskiptum tveggja aðila á markaði. Gert er ráð fyrir að hvert fyrirtæki hafi sitt eigið suð. Þær stærðir sem meta skal eru því í fyrsta lagi öll stök í samdreifnifylki:

$$d\boldsymbol{\alpha}(t)d\boldsymbol{\alpha}(t)'/dt = \boldsymbol{Q} \tag{15}$$

og síðan vektor:

$$\boldsymbol{\sigma_e}' = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)' \tag{16}$$

þar sem σ_i táknar staðalfrávik suðs í viðskiptum með fyrirtæki i. Stærðin á stökum $\boldsymbol{\sigma_e}$ gefur til kynna hversu mikill munur er á gengi í samtímaviðskiptum. Mikið er um það að viðskipti eiga sér stað á sömu sekúndu á mismunandi gengi. Þar sem fyrirtækin eru ca. 80 má sjá að fjöldi stika sem meta skal er af stærðargráðunni 80x40=3200. Það er því ljóst að hér er á ferðinni mikill tæknilegur vandi vegna fjölda stika. Þetta var leyst með þriggja þrepa aðferð í [15, 14]. Í fyrsta þrepi voru stikar metnir fyrir eitt og eitt fyrirtæki í einu. Nálguð voru möt mesta sennileika (e. maximum-likelihood) með tölulegum aðferðum. Sennileikafallið (e. likelihood-function) var reiknað með Kalman-síuaðferðum, sjá t.d. [8] og síðan voru notuð forrit fyrir ólínulega hámörkun. Í skrefi 2 voru tekin öll möguleg pör af fyrirtækjum og fylgni metin með aðferðum sem byggja á því sem lýst er í kafla 3. Þar sem þannig fást metnir fylgnistuðlar en ekki sannir fylgnistuðlar munu þeir ekki nauðsynlega mynda jákvætt ákveðið fylki. Því var brugðið á það ráð að meta Choleski-sundurliðað fylgnifylki, $\boldsymbol{L}$ í staðinn. Úr skrefi 2 fæst því fylki sem er löglegt fylgnifylki, þ.e. jákvætt ákveðið með 1 á hornalínu, $\hat{\boldsymbol{Q}} = \boldsymbol{LL'}$. Í skrefi 3 er það síðan notað sem upphafsgildi í EM-reiknirit (e. expectation-maximum-algorithm). Ef ákveðnum forsendum er fullnægt nálgast EM-reikniritið staðbundið hámark (e. local maximum) sennileikafallsins, sjá t.d. [3]. Tímans vegna var látið nægja að taka einungis eitt skref í EM-reikniritinu. EM skrefið reyndist oft nánast óþarft, þ.e. að breytingar á stikum voru óverulegar. Tilraunir höfundar virðast benda til þess að í þessari tegund hámörkunar gerist lítið eftir fyrsta skrefið. Með þessu fæst hlutlægt mat á fylgnistuðlum og staðalfrávikum á ávöxtun fyrirtæka á Verðbréfaþingi Íslands. Á mynd 4 má sjá súlurit yfir dreifingu metinna fylgnistuðla. Fylgni sumra para, ca. 10% af pörunum, var ekki hægt að meta af ýmsum ástæðum. Metnir voru hins vegar hátt á þriðja þúsund fylgnistuðlar og ljóst að margir þeirra eru illa metnir vegna skorts á gögnum.



Mynd 4. Dreifing metinna fylgnistuðla.

5. Lokaorð

Hér hefur verið leitast við að koma þeim boðskap á framfæri að mikil stærðfræðileg verkefni bíða þeirra sem hyggjast vinna við hagfræði eða fjármálamarkaði. Þetta geta verið hrein stærðfræðileg úrlausnarverkefni um hámörkun eða líkindafræði. Einnig geta þetta verið tölfræðileg viðfangsefni um hvernig skuli umgangast mælingar á hagkerfinu. Þetta geta einnig verið hrein tæknivandamál í tölulegri greiningu.

Summary: The connection of mathematics and economics stressed. A brief overview of the use of mathematics by some Nobel prize winners in economics is given. The economics of financial markets has benefitted from mathematics. The statistical problem of interpreting real data in financial markets is discussed and application of analysis of Icelandic financial market data is described.

Heimildir

[1] L. Bachelier, Theorie de la speculation, *Annales de l'Ecole Normale Superieure*, **17**, 21–86 (1900).

[2] F. Black og M. Scholes, The pricing of options and corporate liabilities, *Journal of Political Economy*, **81**, 635–654 (1973).

[3] R. A. Boyles, On the convergence of the EM algorithm, *Journal of the Royal Statistical Society*, Series B, **45**, 47–50 (1983).

[4] P. J. Brockwell og , R. A. Davis, *Time Series: Theory and Methods*. Springer-Verlag, 1991.

[5] R. Brown, *A brief account of microscopical observations*, óútgefið, London (1827).

[6] D. R. Cox, Regression models and life tables (with discussion), *Journal of the Royal Statistical Society*, Series B, **34**, 187–220 (1972).

[7] A. Einstein, Über die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen, *Annalen der Physik*, **17**, 549–560 (1905).

[8] A. C. Harvey, *Forecasting, Structural Time Series Models and the Kalman Filter*, Cambridge University Press, 1989.

[9] J. Lintner, The valuation of risk assets and the selection of risky investments in stock portfolios and capital budgets, *Review of Economics and Statistics*, **47**, 13–37 (1965).

[10] H. Markowitz, *Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investment*, Wiley, 1959.

[11] R. C. Merton, *Continuous-Time Finance*, Blackwell, 1990.

[12] J. Mossin, Equilibrium in a capital asset market, *Econometrics*, **35**, 768–783 (1966).

[13] W. Sharpe, Capital asset prices: A theory of market equilibrium under conditions of risk, *Journal of Finance*, **19**, 425–442 (1964).

[14] Helgi Tómasson, *Estimation of correlations in financial markets when trading is infrequent*, Skýrsla nr. W00:18, Hagfræðistofnun Háskóla Íslands, (2000).

[15] Helgi Tómasson, *Signal-noise decomposition in financial markets: an empirical stochastic process analysis for infrequent trading*, Skýrsla nr. W00:11, Hagfræðistofnun Háskóla Íslands, (2000).

[16] N. Wiener, Differential space, *Journal of Mathematical Physics*, **2**, 131–174 (1923).

[17] B. Øksendal, *Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications*, Springer-Verlag, 5. útg., 1998.

Um höfundinn: Helgi Tómasson lauk BS prófi i stærðfræði frá Háskóla Íslands 1977 og doktorsprófi í tölfræði frá Háskólanum í Gautaborg 1986. Með námi stundaði Helgi sumarvinnu í Seðlabanka Íslands, en starfaði einnig við kennslu, forritun og tölfræðiráðgjöf. Árið 1983 var Helgi við Purdue University í West-Lafayette í Bandaríkjunum. Árið 1985 vann Helgi við tölfræðideild IARC (alþjóðlegu krabbameinsrannsóknarstofnunarinnar) í Lyon í Frakklandi, 1986-1990 sem starfsmaður Kjararannsóknarnefndar og hefur frá 1990 verið fastráðinn kennari í tölfræði og hagrannsóknum við Viðskipta- og hagfræðideild Háskóla Íslands. Rannsóknir Helga hafa einkum verið á sviði tölfræði fjármálamarkaða og tölfræði í læknisfræði.

Viðskipta- og hagfræðideild Háskóla Íslands
Odda v/Sturlugötu
IS-101 Reykjavík
helgito@hi.is

Móttekin: 18. febrúar 2002