

Bestun verðbréfasafna

Birgir Örn Arnarson

Kaupþingi Búnaðarbanka

Vefútgáfa: 18. október 2003

Ágrip – Tilgangur þessarar greinar er að gefa lesendum dæmi um vandamál sem koma upp í heimi fjármálafræðinnar. Margvísleg og fjölbreytt vandamál eru til staðar, en ástæðan fyrir því að þetta tiltekna vandamál er skoðað felst í stærðfræðilegri fjölbreytni. Vandamálið krefst notkunar á bestunarfræðum á ýmsum stigum, líkindareiknings, sem er grunnurinn í allri fjármálastærðfræði, slembidiffurjöfnum, ólínulegum hlutfleiðjöfnum og tölulegri greiningu.

Verðbréf og áhætta

Flest verðbréf sem standa fjárfestum til boða eru í eðli sínu áhættusöm. Virði bréfa í framtíðinni er venjulega óþekkt, en óvissan í virði bréfsins er breytileg eftir því um hvernig bréf er að ræða. Algengustu verðbréfin flokkast undir hlutabréf og skuldabréf. Hlutabréf er svo hægt að flokka enn frekar niður í virðisbréf (e. value stock) og vaxtabréf (e. growth stock), þar sem meiri væntingar eru gerðar til ávöxtunar vaxtabréfa og að sama skapi er meiri óvissa í virði vaxtabréfa. Skuldabréf má einnig flokka niður í skammtímabréf og langtímabréf þar sem óvissan í virði langtímabréfa er jafnan meiri. Þegar talað er um markaðsáhættu er átt við óvissu í framtíðarvirði markaðs-verðbréfa. Meiri væntingar eru gerðar til ávöxtunar verðbréfa eftir því sem þau eru áhættusamari.

Grundvallarvandamál, sem hver fjárfestir þarf að glíma við, er hvernig hann á að velja verðbréf í verðbréfasafnið sitt. Fjárfestir gæti til dæmis metið vænta ávöxtun þeirra bréfa sem eru í boði, og svo sett allt sitt fjármagn í það bréf sem hefur hæstu væntu ávöxtunina. Þessi aðferð er, almennt séð, ekki vænleg til árangurs þar sem mesta óvissan er að jafnaði í virði þess bréfs sem hefur hæstu væntu ávöxtunina. Flestir fjárfestar vilja hámarka ávöxtun og á sama tíma lágmarka áhættu. Þrjár leiðir til að hámarka ávöxtun og lágmarka áhættu verða kynntar hér að neðan. Fyrsta leiðin, kennd við Markowitz, er svokölluð kaupa-og-eiga-stefna (e. buy and hold), þar sem verðbréfin er keypt inn í safnið í byrjun tímabilsins sem um ræðir og þeim haldið út tímabilið. Önnur

leiðin er kennd við Merton og byggir á kvikri bestun (e. dynamic programming) verðbréfsafnsins. Þriðja leiðin, nefnd martingale-aðferð, byggir á því að finna fjárfestingastefnu sem framkallar bestu lokadreifingu á virði verðbréfasafnsins. Seinni leiðirnar tvær bæta þeirri vídd við að hægt sé að breyta verðbréfasafninu innan tímabilsins. Þær eru því vænlegri en sú fyrsta.

Almenn framsetning

Hér verður fjallað um framsetningu hámarksamræðisins sem blasir við fjárfesti á óformlegum nótum. Markmið fjárfestis er venjulega sett fram á eftirfarandi hátt:

$$\max E[U(X(T))] \quad (*)$$

þar sem hámarkað er yfir allar mögulegar lokastöður $X(T)$ samkvæmt fjárfestingastefnunni sem notuð er. Hér er X slembiferli (e. stochastic process) sem táknar virði, eða í sumum tilfellum ávöxtun, verðbréfasafnsins á tímabilinu sem um ræðir. Mengi mögulegra lokastaðna er háð þeim skorðum sem settar eru á X . U er svokallað nytjafall (e. utility function) sem uppfyllir ákveðin skilyrði, t.d. að U sé hvelft fall (e. concave), svo dæmið sé rétt framsett.

Markowitz

Árið 1952 birtist grein eftir Harry Markowitz [6] sem sögð er byrjunin á nútíma fjármálafræði (e. modern portfolio theory). Þessi leið gerir ráð fyrir að fjárfestir eigi ákveðið fjármagn til að fjárfesta í verðbréfum fyrir ákveðið tímabil. Bréfin eru keypt í byrjun tímabilsins, $t = 0$, og þeim er svo haldið út tímabilið.

Slembiferlið $X(t)$ táknar ávöxtun í þessu tilfelli:

$$X(t) = \sum_{i=1}^n w_i R_i(t)$$

þar sem n er fjöldi verðbréfa sem fjárfestirinn getur valið úr, w_i er hlutfall upphafs fjármagns fjárfest í verðbréfi i og $R_i(t)$ er ávöxtun verðbréfs i frá upphafi tímabils til tíma t .

Markmið fjárfestans er að ná fyrirfram ákveðinni ávöxtun R með lágmarks óvissu. Markowitz mælir óvissu með ferveiki (e. variance) og stærðfræðileg framsetning vandamálsins er því

$$\min_w E[(X(T) - R)^2] = \min_w w \cdot Cw$$

þannig að

$$E[X(T)] = \sum_{i=1}^n w_i E[R_i(T)] = R,$$

með $w_i \geq 0$ og $\sum_{i=1}^n w_i = 1$, þar sem C er samvika-fylki verðbréfa. Það er einnig hægt að snúa dæminu við og hámarka ávöxtunina miðað við fyrirframgefið ferveik.

Almennt er ekki til lausn á þessu vandamáli á lokuðu formi, en tölulegar lausnir eru nokkuð skilvirkar. Hægt er að sýna fram á að lausnin á þessu vandamáli er hvel í $R\sigma$ -plani þar sem σ er staðalfrávik $X(T)$ (kvaðratróttin af ferveikinu).

Þessi aðferð er víða notuð þegar verið er að velja eignasamsetningu fjárfesta, enda er aðferðin sú einfaldasta sinnar tegundar og nokkuð þægileg í notkun. Mörg verðbréfafyrirtæki byggja ráðgjöf sína að einhverju leyti á aðferðinni. Aðferðinni er nánar lýst, t.d. í Sharpe o.fl. [10].

Merton

Megingallinn við aðferð Markowitz er að fjárfestirinn getur ekki nýtt sér nýjar upplýsingar af markaðnum, sem koma inn eftir því sem tíminn líður, til að breyta samsetningu verðbréfasafnsins. Það er því ljóst að gera má betur en Markowitz með því að nýta þessar upplýsingar. Það er hægt að gera betur með því að bæta inn skrefum, eða ákveðnum tímum, þar sem samsetning verðbréfasafnsins er endurskoðuð, en sama gagnrýni á alltaf við milli skrefa. Einnig verður lausnin flóknari og flóknari eftir því sem skrefum fjölga og segja má að lausn á praktískum vandamálum sé nánast ógerningur. Líkón sem eru samfelld í tíma leysa þetta vandamál.

Áður en hægt er að fara í einstaka aðferðir, þá verður að huga að samfelldum slembiferlum fyrir verð verðbréfa. Uppsetningin sem hér er sýnd er orðin stöðluð í samfelldum fjármálafræðum og eftirfarandi umfjöllun styðst við Korn [5]. Athyglin beinist að fjármálamarkaði sem samanstendur af einu áhættulausu bréfi, kallað bankareikningur eða skuldabréf (e. bond), og n áhættusömum bréfum, kölluð hlutabréf (e. stock). Þó ber að taka fram að áhættusömu eignirnar eru kallaðar hlutabréf til þæginda, en þær geta allt eins verið skuldabréf eða annars konar áhættusöm verðbréf. Þróun bankareikningsins í tíma er lýst með diffurjöfnunni

$$dP_0 = P_0 r dt, \quad P_0(0) = 1,$$

en þróun hlutabréfanna er lýst með slembidiffurjöfnunum

$$dP_i = P_i \left(b_i dt + \sum_{j=1}^n \sigma_{ij} dW_j \right),$$

$$P_i(0) = p_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Hér er $W(t) = (W_i(t))_{i=1, \dots, n}$. n -vitt Wiener-ferli, (sjá Øksendal [11]), skilgreint á fullkomnu líkindarúmi. Í þessari grein er gert ráð fyrir að r , b_i og σ_{ij} séu fastar, en þetta geta verið aðlöguð (e. adapted) föll F_t , þar sem F_t er náttúruleg sía (e. natural filtration) Wiener-ferlisins. Ástæðan fyrir því að velja líkan á þessu formi verður ekki tíunduð hér, en lesandanum er bent á Korn [5], kafla 2.

Gert er ráð fyrir fjárfestirinn hafi ekki ráðandi áhrif á markaðinn og að hann fjármagni breytingar á safninu aðeins með því fjármagni sem þegar er til í safninu (e. self-financing). Fjárfestingastefna er skilgreind sem F_t -aðlagð $n + 1$ vitt slembiferli $\phi(t)$ þannig að í tíma t eru nákvæmlega $\phi_i(t)$ bréf af verðbréfi i . Virði verðbréfasafnsins á tímanum t er því

$$X(t) = \sum_{i=1}^n \phi_i(t) P_i(t),$$

þar sem $X(0)$ er upphafsauðurinn. Skilyrðið um fjármögnun á breytingum safnsins má setja fram sem

$$X(t) = X(0) + \sum_{i=1}^n \int_0^t \phi_i(s) dP_i(s).$$

(Sjá t.d. Korn [5].) Sá fyrsti til að beita þekktum aðferðum úr kvikri bestun (e. dynamic programming) á

vandamálið var R. C. Merton [7]. Hér verður aðferð hans lýst á nokkuð yfirborðskenndan hátt, en nánari lýsingu má t.d. finna í Merton [8]. Hugmynd Mertons er að líta á virðisferlið sem stýrt ferli á forminu

$$dX^\phi = \mu^\phi dt + \nu^\phi dW$$

þar sem $\phi(t)$ er valið til að leysa hámarksvandamálið (*). Notkun á stöðluðum aðferðum úr kvikri bestun takmarkast við löggengna (e. deterministic) stuðla r , b_i og σ_{ij} , og beinar (e. explicit) lausnir takmarkast við fasta stuðla. Hámarkið er lausn á Hamilton-Jacobi-Bellman-jöfnunni. Jafnan er ólínuleg hlutfleiðujafna og beinar lausnir eru sjaldnast til fyrir praktísk vandamál. Jafnvel tölulegar lausnaraðferðir eru mjög takmarkaðar.

Hér verður farið yfir lausn á vandamálinu þegar fjöldi hlutabréfa er 1 og allir stuðlar eru fastar. Umfjöllunin styðst við Øksendal [11], kafla 11. Nýtjafallið sem við skoðum er á forminu

$$U(x) = x^\gamma / \gamma$$

þar sem $0 < \gamma < 1$. Markmiðið er að finna fjárfestingastefnuna $u^*(t, x)$ sem hámarkar $E[(X_T^\gamma)^\gamma / \gamma]$. Hér er u hlutfall af virði safnsins sem fjárfest er í hlutabréfið á hverjum tíma. Hámarkið er skilgreint sem

$$\Phi(t, x) = \sup_u E[(X_T^\gamma)^\gamma / \gamma].$$

Hamilton-Jacobi-Bellman-jafnan lítur þannig út:

$$\sup_u \left\{ (L^u \Phi)(t, x) \right\} = 0, \quad \text{með}$$

$$L^u \Phi = \Phi_t + x(r + (b - r)u)\Phi_x + \frac{1}{2} \sigma^2 u^2 x^2 \Phi_{xx},$$

fyrir $x > 0$ og $t < T$, og $\Phi(T, x) = x^\gamma / \gamma$. Lausnina á þessu vandamáli er t.d. í Øksendal [11],

$$u^*(t) = \frac{b - r}{\sigma^2(1 - \gamma)}.$$

Lausnin er sem sagt sú að fjárfesta föstu hlutfalli af virði safnsins í hlutabréf. Virði safnsins breytist á hverjum tíma og því þarf stöðugt að fjárfesta til að halda hlutfallinu réttu.

Martingale-aðferðir

Martingale-aðferðir komu fram á sjónarsviðið með greinum eftir Pliska [9] og Karatzas o.fl. [3]. Meginhugmyndin við þessar aðferðir er að skipta vandamálinu í tvo hluta. Fyrri hlutinn felst í því að

finna mengi allra mögulegra lokadreifinga á virði verðbréfasafnsins og finna svo þá dreifingu sem leysir (*). Seinni hlutinn felst svo í því að finna fjárfestingastefnuna sem framkallar bestu lokadreifinguna. Uppsetningin er eins og í umfjölluninni um Merton-aðferðina.

Stiklað er á stóru við lýsingu aðferðarinnar, enda krefst viðfangsefnið töluverðs undirbúnings.

Virðisferli er kallað leyfilegt (e. admissible) ef $X(t) \geq 0$ fyrir öll t . Mengi allra leyfilegra fjárfestingastefna, $A(x)$, er skilgreint sem mengi sjálf-fjármagnandi fjárfestingastefna sem framkalla leyfileg virðisferli með $X(0) = x$.

Martingale-aðferðir byggja á eftirfarandi reglum um fullkomleika markaðarins (sjá t.d. Korn [5] eða Karatzas og Shreve [4]).

Sérhver fjárfestingastefna $\phi(t) \in A(x)$ með virðisferli $X(t)$ uppfyllir $E(H(t)X(t)) \leq x$, þar sem

$$H(t) = \exp \left(- \int_0^t (r(s) + \|\theta(s)\|^2 / 2) ds - \int_0^t \theta(s) dW(s) \right)$$

og virði markaðsáhættu (e. market price of risk) er

$$\theta(t) = \sigma^{-1}(t)(b(t) - r(t)1).$$

Hér er 1 vektor af vídd n með öll stök 1. Seinni reglan er eftirfarandi. Fyrir sérhverja F_T -aðlagða slembibreytu B sem uppfyllir $E(H(T)B) < \infty$, er til fjárfestingastefna $\phi(t) \in A(x)$, þar sem $x = E(H(T)B)$, þannig að virðisferlið uppfyllir $X(T) = B$. Þessar reglur nægja til að skilgreina mengi mögulegra lokadreifinga og sönnunin á seinni reglunni er uppbyggjandi (notar martingale-framsetningarregluna) og gefur lausnina á seinni hluta vandamálsins. Hér verður farið yfir sama vandamál og gert var með Merton-aðferðinni.

Markmiðið er að finna slembibreytuna ξ sem hámarkar $E[\xi^\gamma]$, þannig að ξ sé framkallanleg með fjárfestingastefnu úr $A(x)$ ($x < \infty$), þ.e., ξ verður að uppfylla

$$E[H(T)\xi] = x.$$

Þetta vandamál má leysa, t.d., með nykrunarfræðum (e. duality theory). Lausnina er hægt að finna í Karatzas og Shreve [4], kafla 3:

$$\xi = \frac{x H(T)^{1/(\gamma-1)}}{E[H(T)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}]}.$$

Þegar lokadreifingin hefur verið fundin, þá á eftir að finna fjárfestingastefnuna með hefur virðisferlið $X(t)$ sem uppfyllir $X(T) = \xi$. Sönnunin á seinni reglunni gefur til kynna hvernig fjárfestingastefnan er fundin. Megin hugmyndin er að nota martingale-framsetningarregluna, og með henni finnst að eins og áður skuli fjárfesta eftirtöldu hlutfalli af virði safnsins í hlutabréfinu á hverjum tíma t :

$$u^*(t) = \frac{b - r}{\sigma^2(1 - \gamma)}.$$

Lokaorð

Seinni leiðin tvær til að besta samsetningu verðbréfasafns eru klárlega vænlegri til árangurs en fyrsta leiðin, þar sem meiri upplýsingar eru notaðar við bestunina í seinni leiðunum. Auk þess að nota meiri upplýsingar, þá er hægt að bæta inn neyslu (e. consumption) á tímabilinu og nota hana sem eina af stýribreytum í bestunarvandamálinu.

Merton-aðferðin er ekki eins þægileg í notkun og martingale-aðferðin af ýmsum ástæðum. Það er erfiðara að fást við ólínulega hlutfleiðujöfnu heldur en slembidiffurjöfnurnar í martingale aðferðinni, og fáar beinar lausnir eru til. Töluleg greining á Merton-aðferðinni er mjög erfið og þær niðurstöður sem hafa verið birtar (sjá Brennan o.fl. [2]) benda til óstöðugleika. Töluleg greining á martingale-aðferðinni er mun aðgengilegri, en hún bíður m.a. upp á Monte-Carlo-lausnir. Martingale-aðferðin er auk þess vænlegri þegar aðferðunum er beitt í raunverulegu markaðsumhverfi þar sem þættir svo sem vextir og sveiflur (e. volatility) breytast í tíma, auk þess sem hægt er að útvíkka martingale-aðferðina til að taka tillit til ýmissa skorða á fjárfestingastefnuna sem ekki er þægilegt að taka tillit til í Merton-aðferðinni.

Aðalgallinn við báðar þessar aðferðir er að þær gera ráð fyrir að hægt sé að kaupa og selja samfellt í tíma án þess að greiða nokkrar þóknanir. Þetta er ekki hægt á raunverulegum mörkuðum. Aðferðir sem taka tillit færslukostnaðar hafa verið þróaðar, en þær byggja á svokölluðum impulse control aðferðum. Atkinson og Wilmott [1] hafa skoðað leiðir til að útvíkka martingale-aðferðina þannig að tekið sé tillit til færslukostnaðar. Þessar leiðir eru vænlegastar til að virka í raunverulegu markaðsumhverfi.

Summary: The purpose of this paper is to give the reader examples of problems that arise in mathematical finance. Mathematical finance is a very diverse field, but the focus

of the paper is on portfolio optimization which itself draws on various mathematical tools. Portfolio optimization requires standard optimization techniques, probability theory, stochastic differential equations, non-linear partial differential equations, and numerical analysis.

Heimildir

- [1] C. Atkinson og P. Wilmott, Portfolio management with transaction costs: An asymptotic analysis of the Morton and Pliska model, *Mathematical Finance*, **5**, 357-367, (1995).
- [2] M. J. Brennan, E. S. Schwartz og R. Lagnado, Strategic asset allocation, *Journal of Economic Dynamics and Control*, **21**, 1377-1403, (1997).
- [3] I. Karatzas, J. P. Lehoczky og S. E. Shreve, Optimal portfolio and consumption decisions for a small investor on a finite horizon, *SIAM Journal on Control and Optimization*, **27**, 1157-1186, (1987).
- [4] I. Karatzas og S. E. Shreve, *Methods of Mathematical Finance*, Springer Verlag, 1998.
- [5] R. Korn, *Optimal Portfolios*, World Scientific, 1997.
- [6] H. M. Markowitz, Portfolio Selection, *Journal of Finance*, **7:1**, 77-91, (1952).
- [7] R. C. Merton, Lifetime portfolio selection under uncertainty: the continuous case, *Reviews of Economical Statistics*, **51**, 247-257, (1969).
- [8] R. C. Merton, *Continuous-Time Finance*, Blackwell, 1990.
- [9] S. R. Pliska, A stochastic calculus model of continuous trading: Optimal portfolios, *Mathematics of Operations Research*, **11**, 371-382, (1986).
- [10] W. F. Sharpe, G. J. Alexander og J. V. Bailey, *Investments*, 6. útg., Prentice Hall, 1999.
- [11] B. Øksendal, *Stochastic Differential Equations*, 5. útg., Springer Verlag, 1998.

Um höfundinn: Birgir fæddist árið 1971 á Akureyri. Hann útskrifaðist frá Menntaskólanum á Akureyri 1991 og lauk B.S. í stærðfræði frá University of Kansas 1994. Birgir stundaði framhaldsnám í stærðfræði við University of Minnesota veturinn 1994-1995 og lauk doktorsprófi í fræðilegri og hagnýtri aflfræði frá Cornell University 1999. Birgir hefur starfað í áhættustýringu Kaupþings-Búnaðarbanka frá 1999 og sem forstöðumaður rannsóknar- og þróunarsviðs frá 2003.

Kaupþing Búnaðarbanki
Ármúla 13
IS-108 Reykjavík
boa@kaupthing.net

Móttekin: 1. febrúar 2002.