

Nokkur reiknilíkön af fiskitorfum og fiskigöngum

Kjartan G. Magnússon

Raunvísindastofnun Háskólans

Vefútgáfa: 19. desember 2003

Ágrip Hér er lýst þremur reiknilíkönum sem ætlað er að líkja eftir göngum fiska. Ferðir fiska og dreifing þeirra í tíma og rúmi stjórnað af ýmsum þáttum svo sem umhverfisskilyrðum (t.d. hitastigi og fæðuþéttleika), jöðrum sem fiskar fara ekki yfir (svo sem skil milli kald- og hlýsjávar), líkamlegu ástandi fiskanna og svæðum sem fiskar leita á til að hrygna. Í öllum líkönunum er skilgreind svokölluð kjörstefna sem ákvarðast af þáttum innan líkansins sem og af ytri þáttum. Eitt þessara líkana er strjált í tíma og líkir eftir ferðum einstakra fiska þar sem hraði hvers fisks ræðst að nokkru af meðalhraða fiska í næsta nágrenni ásamt suði sem beinir fiskunum í átt að hrygningarslóðinni. Annað líkan er í samfelldum tíma fyrir samfelldan þéttleika og hraða. Jöfnur líkansins eru varðveislujöfnur fyrir massa og fyrir skriðþunga og kraftar í skriðþungajöfnunni snúa hraðavigrinum í gefna kjörstefnu. Þriðja líkanið er af svokallaðri Kolmogorov gerð, þ.e. hlutafleiðujafna fyrir þéttifall hendingar sem gefur staðsetningu fisks. Kjörstefnan ákvarðast af stigli gefins falls af hitastigi, fæðumagni og fjarlægð frá hrygningarslóð. Sýndar eru niðurstöður hermána fyrir tvö þessara líkana. Tilgangurinn með þessum reiknilíkönunum er m.a. að prófa tilgátur um áhrif umhverfisskilyrða á göngur.

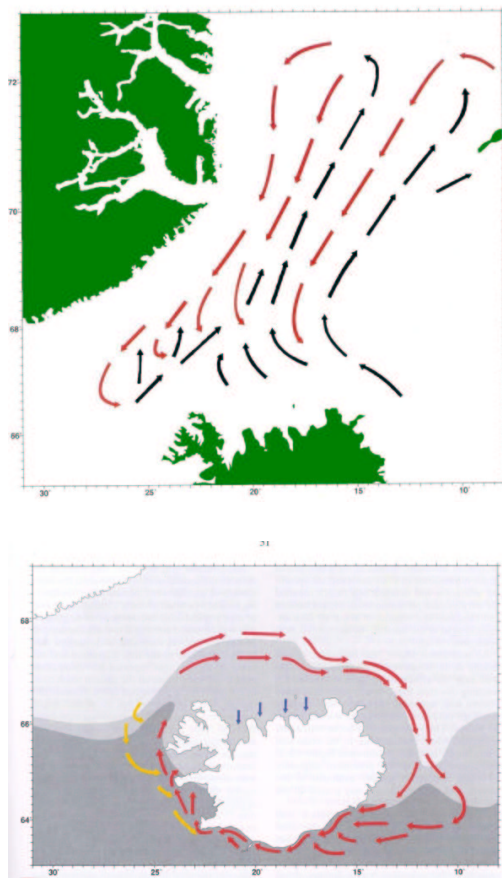
Inngangur

Ýmsar tegundir uppsjávarfiska ferðast langar vegalengdir milli fæðuslóðar og hrygningarslóðva. Gott dæmi um slíkar göngur eru ferðir loðnu á hafsvæðinu umhverfis Ísland og milli Íslands og Jan Mayen [1], sjá mynd 1. Snemma sumars gengur hluti stofnsins norður í átt til Jan Mayen í fæðuleit og snýr aftur snemma hausti á hafsvæðið fyrir norðan og norðvestan Ísland. Hrygningarstofninn gengur síðan austur og suður fyrir land og hrygnir í mars-apríl fyrir suðvestan og vestan land. Sum ár fer hluti stofnsins beina leið suður með vesturströndinni á hrygningarslóðvarnar. Stærð þess hluta sem fer vesturleiðina er mjög mismunandi og getur jafnvel verið meginhluti hrygningarstofnsins.

Hér er ætlunin að lýsa nokkrum reiknilíkönunum sem eiga að líkja eftir dreifingu fiska í tíma og rúmi, torfumyndun og göngum milli fæðuslóðar og hrygningarslóðva. Hægt er að nálgast svona verkefni á ýmsa vegu. Ein leið er að skipta öllu svæðinu sem um ræðir í hlutsvæði og skilgreina þvínæst fylki þar sem stakið i í röð i og dálki j er hlutfallið sem fer af hlutsvæði i yfir á hlutsvæði j á hverri tímaeiningu [2]. Síðan má reyna að meta stökin út frá merkingagögn-

um og gögnum um dreifingu fiska á mismunandi tímum. Önnur leið er að spá fyrir um *bestu* gönguleið með því að hámarka svokallað hæfisfall (e. fitness function), sem oftast er fjöldi afkvæma sem fiskur eignast [3]. Hæfisfallið er fall af þeim ákvörðunum sem fiskarnir taka á lífsferlinum, hvar þeir hrygna og hvar þeir leita sér fæðu. Í því tilviki má líta svo á að hæfisfallið sé fall af stikuðum ferli í tví- eða þrívíðu rúmi þar sem stikinn er tími. Þessi aðferð grundvallast á þeirri forsendu að hæfustu einstaklingarnir eru þeir sem eignast flest afkvæmi og að ákvarðanir sem teknar eru á lífsferlinum (e. life history strategies) séu að miklu leyti bundnar í erfðir. Úrval náttúrunnar hefur svo séð til þess að þær ákvarðanir sem leiða til flestra afkvæma hafa orðið ofan á. Þriðja leiðin er svo að setja upp kerfi diffur- eða mismunajafna sem lýsa dreifingu og hraða fiskanna, þar sem m.a. er reynt að útskýra breytingar á hraða og þéttleika út frá umhverfispáttum [4, 5, 6]. Þeirri nálgun verður fylgt í þessari grein sem er samantekt á rannsóknunum sem farið hafa fram á reiknifræðistofu Raunvísindastofnunar Háskólans.

Fiskigöngur stjórnað af erfðum og umhverfi, sjá nánar í [1, 7, 8]. Fyrst er að nefna að kynþroska fiskar



Mynd 1. Fæðu- og hrygningagöngur loðnu við Ísland (úr Hjálmar Vilhjálmsson, [1])

verða að hrygna á ákveðnu svæði á ákveðnu tímabili, þ.e. vera á réttum stað á réttum tíma, en þó ber að hafa í huga að *rétti staðurinn og rétti tíminn* ráðast að hluta til af umhverfisaðstæðum og eru því breytilegir milli ára. Slíkar hrygningargöngur stjórnað sennilega að miklu leyti af erfðum; ætla má að áhrif af úrvali náttúrunnar gegnum fjölda kynslóða hafi leitt til þess að staðsetning og tímasetning hrygningar sé sú sem skilur bestum árangri að jafnaði. Þar sem svo takmarkað er vitað um hvað ræður hrygningargöngum, sem og hvernig fiskar rata, er ómögulegt að gera reiknilíkön sem líkja eftir þessum göngum án þess að gefa sér ýmsar forsendur. Í líkönum þeim sem hér verður lýst verður gert ráð fyrir *krafti* sem togar hrygningarfisk í

átt að hrygningarstöðvunum. Þetta er e.t.v. ekki eins óraunhæft og kann að virðast í fyrstu, því vitað er að segulsvið stýrir fari ýmissa fugla og hugsanlega fiska líka. Engu að síður er tilgáta um *togkraft* á ýmsan hátt ófullnægjandi, en verður að nægja þar sem þekkingu skortir til að gera megi raunhæfara líkan.

Í öðru lagi er ljóst að umhverfisbreytur s.s. hitastig, fæðubéttleiki, seltustig, straumar o.s.frv. hafa áhrif á ferðir fiska. Almennit má gera ráð fyrir að fiskar leiti þangað sem aðstæður eru betri, t.d. meiri fæða og þægilegra hitastig og forðist svæði sem eru of heit eða of köld, of grunn, með of miklum fjölda ránfiska og þess háttar. Það er vitað að fiskar fylgja oft skilum milli kaldsjávar og hlýsjávar og fara ógjarnan yfir vissar jafnhitalínur, t.d. fer loðnan yfirleitt ekki yfir í kaldari sjó en -1°C . Slík skil og jafnhitaferlar mynda því jaðra sem takmarka ferðir fiskanna.

Í þriðja lagi ráðast áhrif ofangreindra þátta að töluverðu leyti af ástandi fisksins, t.d. orkuástandi og kynþroskastigi. Þar sem allt snýst um að vera á hrygningarslóðinni á réttum tíma, þ.e. þegar fiskarnir eru komnir að hrygningu, verða þeir að stjórna ferð sinni eftir því hversu langt hrognafyllingin er komin. Hrygningarganga loðnu umhverfis Ísland stöðvast t.d. við skil milli kald- og hlýsjávar út af Suðausturlandi ef hrognafylling er skammt á veg komin og heldur svo áfram þegar nægjanlegri fyllingu er náð.

Í síðasta lagi skal nefna að þéttleiki og hraði fiska hefur áhrif á dreifinguna og hversu víðfeðmar (fæðu)göngur eru. Bæði er það að fiskar leitast við að viðhalda kjörþéttleika, og leita því burt frá svæðum þar sem þéttleikinn er of mikill, en einnig hafa tilraunir sýnt að fiskar í torfu skynja hreyfingu fiskanna í næsta nágrenni og laga ferð sína og stefnu að hraða þeirra [9]. Þessi hegðun veldur torfumyndun og viðheldur torfum.

Líkön

Við skulum byrja á því að lýsa göngum fiska á sem einfaldastan hátt með líkani af hreyfingu einstakra fiska, sem er strjált í tíma og slembið.

Látum $(x_i(t), y_i(t))^T$ vera staðarvigur fisks nr. i á tíma t . Þá má lýsa breytingum á staðsetningu með (sjá [10])

$$\begin{pmatrix} x_i(t + \Delta t) \\ y_i(t + \Delta t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_i(t) \\ y_i(t) \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} \cos \theta_i(t) \\ \sin \theta_i(t) \end{pmatrix} \Delta t \quad (1)$$

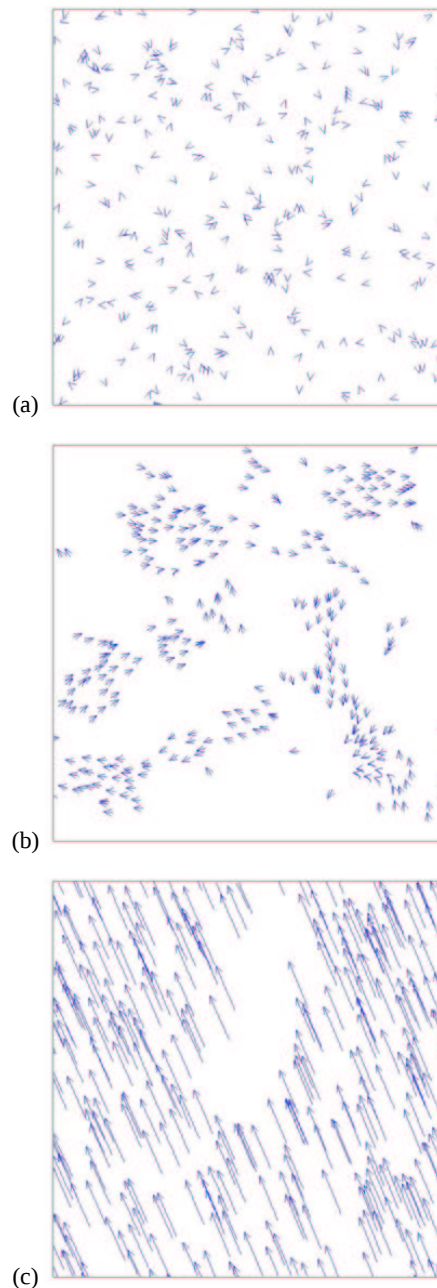
þar sem $\nu(\cos \theta_i(t), \sin \theta_i(t))^T$ er hraðavigur fiskisins, ν er ferðin og θ_i er stefnuhorn hans. Til einföldunar skulum við gera ráð fyrir að ferðin sé fasti og þar sem stefnan ræðst af stefnu næstu fiska í torfunni, þá látum við stefnuhornið vera gefið með

$$\theta_i(t) = \langle \theta_j(t) \rangle_{i,r} + \xi_i^t \quad (2)$$

þar sem fyrri liður hægri hliðar er meðaltal af stefnuhornum allra fiska sem eru innan fjarlægðar r frá fiski nr. i (reiknað sem stefnuhorn af summu einingarvigra í stefnu hvers fiskis) og seinni liðurinn er hending eða suð, sem við gerum í bili ráð fyrir að hafi jafna (e. uniform) dreifingu, þ.e. $\xi \sim U[-\eta/2, \eta/2]$. Þetta einfalda líkan er hliðstætt svokölluðum *kerfum samverkandi agna* (e. interacting particle system) úr eðlisfræði. Stíkar líkansins eru: r , sem kalla má skynjunargeisla fiskanna, ρ , sem er þéttleiki fiska og η , sem er í beinu hlutfalli við staðalfrávik suðsins. Það er ljóst að skynjunargeislinn skiptir hér miklu; ef r er núll, þá ferðast hver fiskur eftir slembigangi, óháð hinum. Hins vegar ef geislinn er svo stór að hver fiskur skynjar hreyfingu allra hinna fiskanna þá er hreyfing hvers fiskis háð stefnu allra hinna og allir fiskarnir hreyfast sem ein heild.

Þó að þetta líkan sé með allra einfaldasta móti, má engu að síður fá fram fjölbreytta hegðun, allt eftir gildum stikanna. Þetta er sýnt á mynd 2. Ef þéttleikinn er lítill og suðið hátt þá eru hreyfingar fiskanna meira og minna óháðar (2a). Ef hins vegar þéttleikinn er aukinn og dregið úr suðinu þá myndast smátorfur sem hreyfast saman, en óháð öðrum torfum (2b). Ef dregið er enn frekar úr suðinu og þéttleikinn aukinn þá verður stefna allra fiskanna eins (2c). Þessi mynstur eru í samræmi við ýmsar athuganir á hegðan torfufiska; á fæðuslóð er fiskurinn í fremur litlum torfum sem synda í allar áttir, en á hrygningargöngu myndast stórar torfur sem allar hafa sömu stefnu.

Jaðarskilyrðin í mynd 2 eru lotubundin, þ.e. fyrir hvern fisk sem yfirgefur svæðið í punkti (L, y) þá kemur annar inn á svæðið í punkti $(0, y)$ þar sem L er lengd svæðisins frá vestri til austurs, og hliðstætt fyrir norður og suðurjaðrana. Þetta merkir að hreyfingin er á hjólfleti (e. torus). Það má túlka þetta jaðarskilyrði þannig að umrætt svæði sé einungis hluti miklu stærra svæðis og nettó flæði inn í litla svæðið sé núll. Ef ætlunin er að líkja eftir göngum fiska frá fæðuslóð til hrygningarstöðva eru þetta því ekki heppileguskið. Að auki er það tilviljun sem



Mynd 2. Hreyfing agna fyrir fyrir mismunandi þéttleika agna og styrk suðs. Styrkur suðsins er mestur í efstu mynd og minnstur í þeirri neðstu.

ræður því hver endanleg stefna allra fiskanna verður. Þetta einfalda líkan á því ekki við þegar reynt er að

líkja eftir göngum fiska milli hafsvæða. Það myndar hins vegar kjarnann í göngulíkani því sem list verður hér á eftir.

Strjált líkan

Athugum nú líkan sem er strjált í tíma, slembið og lýsir hreyfingu einstakra fiska, sjá nánar í [11]. Þeir þættir sem ákvarða hraðavigur fiskanna eru:

- Meðalhraði næstu fiska (sbr. lýsingu hér að ofan)
- Suð, þ.e. tilviljanakenndar breytingar á hraða
- Aðdráttarsvæði, þ.e. svæði sem fiskarnir dragast að, yfirleitt hrygningarsvæði.
- Innra ástand fisks (orkustaða, hrognafylling)
- Aðdráttar- og fráhrindikraftar milli fiska
- Umhverfisskilyrði þ.e.
 - Stigulsvið fyrir hitastig og fæðuþéttleika
 - Jaðrar og jaðarskilyrði, t.d. hitaskil, jafnhitalínur eða dýptarlínur.

Við hugsum okkur að hreyfing hvers fisks lúti sömu jöfnu og hér að ofan,

$$\begin{pmatrix} x_i(t + \Delta t) \\ y_i(t + \Delta t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_i(t) \\ y_i(t) \end{pmatrix} + \nu_i(t) \begin{pmatrix} \cos \theta_i(t) \\ \sin \theta_i(t) \end{pmatrix} \Delta t \quad (3)$$

en nú er færslan samsett úr fleiri liðum. Einingavigurinn $(\cos \theta_i(t), \sin \theta_i(t))^T$ er vegið meðaltal tveggja einingavigra, annars vegar vigurs $p_i(t)$ sem ræðst af meðalstefnu nágrannanna - stefnuhorn þess vigurs er gefið með jöfnu (2) - og hins vegar vigurs $q_i(t)$ sem ákvarðast af stigulsviði fyrir umhverfisskilyrði, þ.e. hitastig og/eða fæðuþéttleika. Vigurinn $(\cos \theta_i(t), \sin \theta_i(t))^T$ er því einingavigur í stefnunna, $\alpha p_i(t) + (1 - \alpha)q_i(t)$, þ.e.

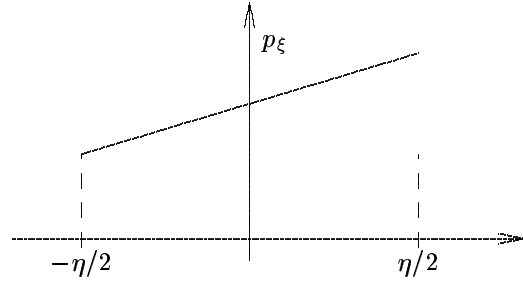
$$(\cos \theta_i(t), \sin \theta_i(t))^T = \frac{(\alpha p_i(t) + (1 - \alpha)q_i(t))}{\|(\alpha p_i(t) + (1 - \alpha)q_i(t))\|} \quad (4)$$

Athugið að líkanið er strjált í tíma til að einfaldara sé að líkja eftir ferðum fiskanna, en ef tíminn er samfelldur er hreyfingu hvers fisks lýst með slembinni diffurjöfnu.

Ferðin $\nu_i(t)$ ákvarðast af ferð allra fiska í næsta nágrenni fisks nr. i , þ.e.

$$\nu_i(t + \Delta t) = \langle \nu(t) \rangle_{i,r} + \zeta_i^t \quad (5)$$

þar sem $\langle \nu \rangle_{i,r}$ er meðalferð allra fiska sem eru innan fjarlægðar r frá fiski nr. i og ζ_i^t er hending eða



Mynd 3. Þéttifall hendingarinnar ξ í stefnuhorninu θ .

suð. Þéttifall þessarar hendingar verður skilgreint hér á eftir.

Hendingarlið stefnuhornsins má velja á þann hátt að stefnan þegar hrygningargangan hefst leiti í rétta átt. Þetta má m.a. gera með því að velja skekka dreifingu, þ.a. hendingarkenndar stefnubreytingar í rétta stefnu eru líklegri en hinar. Þetta er kallað stefnusuð. Látum þéttifall ξ vera (sjá mynd 3)

$$p_\xi(x) = \begin{cases} \frac{2\gamma}{\eta^2}x + \frac{1}{\eta} & \text{ef } |x| \leq \frac{\eta}{2} \\ 0 & \text{ef } |x| > \frac{\eta}{2} \end{cases} \quad (6)$$

þar sem

$$\gamma = \kappa_\theta \frac{\theta_i^0(t) - \theta_i(t)}{\pi}, \quad 0 \leq \kappa_\theta \leq 1 \quad (7)$$

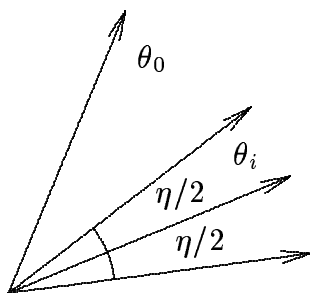
Hornið $\theta_i(t)$ er stefna fisks nr. i og hornið $\theta_i^0(t)$ er skilgreint á eftirfarandi hátt: Tiltökum aðdráttarpunkt, sem er yfirleitt punktur í hrygningarsvæðinu. Hornið $\theta_i^0(t)$ er þá stefnuhorn vigursins $(x_0 - x_i(t), y_0 - y_i(t))$ þar sem $(x_i(t), y_i(t))$ eru hnit fisks nr. i og (x_0, y_0) eru hnit aðdráttarpunktsins. Gerð þéttifallsins hefur það í för með sér að líklegra er að fiskurinn sveigi í rétta átt (sjá mynd 4). Yfirleitt er stíkkinn κ_θ núll eða einn, þ.e. stefnusuðið er annaðhvort virkt eða ekki.

Meðhöndla má ferðina á svipaðan hátt, þannig að gert er ráð fyrir að hendingarliðurinn ζ hafi þéttifallið

$$p_\zeta(x) = \begin{cases} \frac{2\lambda}{\mu^2}x + \frac{1}{\mu} & \text{ef } |x| \leq \frac{\mu}{2} \\ 0 & \text{ef } |x| > \frac{\mu}{2} \end{cases} \quad (8)$$

þar sem

$$\lambda = \kappa_\nu \max \left\{ \min \left\{ \nu_0 - \nu_i(t), 1 \right\}, -1 \right\}, \quad 0 \leq \kappa_\nu \leq 1 \quad (9)$$



Mynd 4. Kjörstefna θ_0 og raunstefna θ_i fisks ásamt bili mögulegra stefnubreytinga. Í því tilfelli sem sýnt er hér líklegra að fiskurinn sveigi til vinstri.

Stikinn ν_0 er nokkurs konar viðmiðunarferð eða kjörferð, sem getur verið háð umhverfisaðstæðum og innra ástandi fisksins (t.d. orkuforða eða hrognafyllingu). Þennan stika má hugsanlega meta út frá tiltækum gögnum um dreifingu fiska. Fiskar sem fara hægar en viðmiðunarferðin eru líklegri til að auka ferðina en hitt, en þeir sem fara hraðar eru líklegri til að hægja á sér.

Til að lýsa áhrifum umhverfisins á dreifingu og hreyfingu fiskanna þarf að tiltaka stigulsvið hitastigs og fæðupéttleika. Vigurinn q sem nefndur var hér að framan er vegið meðaltal þessara tveggja stigla. Vogtölurnar geta verið breytilegar, stundum er það eingöngu fæðustigullinn sem hefur áhrif, stundum eingöngu hitastigullinn og stundum báðir.

Svæðið sem fiskarnir ferðast um afmarkast af jöðrum sem geta verið hitaskil, vissar jafnhitalínur eða dýptarlínur. Skilyrði á jöðrunum eru í meginatriðum þau að ekkert flæði er í gegnum jaðarinn. Á sumum jöðrum (jafnhitalínum) er þó gert ráð fyrir svokölluðu *fráhrindiskilyrði*, þ.e. ef fiskur fer yfir jaðarinn þá verkar hitastigulsvið á hann sem beinir honum oftast aftur tilbaka. Þetta er gert með því að hitastigsstigullinn fær háan vogstuðul þegar vigurinn q er myndaður.

Að lokum skal nefna breytu sem gefur orkuástand fisksins. Á fæðuslóð safna fiskar orku og þegar ákveðnu lágmarki er náð hefst hrygningargangan. Magni fæðu á hverjum stað er lýst með svokölluðum fæðufleti (e. food density surface) sem er ekkert annað en graf falls af tveimur rúmbreytistærðum, þ.e. fæðupéttleika sem fall af staðsetningu. Þetta fall gefur þá jafnframt fæðustigullinn sem nefndur hefur ver-

ið. Aukning á orkuforða fisks ræðst af hæð fæðufletarins á hverjum stað og því af staðsetningu fisksins á hverjum tíma. Hrygningargangan hefst því á mismunandi tímum hjá hinum ýmsu torfum, allt eftir því hvar á fæðuslóðinni torfurnar hafa haldið sig. Í þeim hermunum sem lýst verður hér á eftir er gert ráð fyrir að orkuforðinn vaxi línulega þ.e.

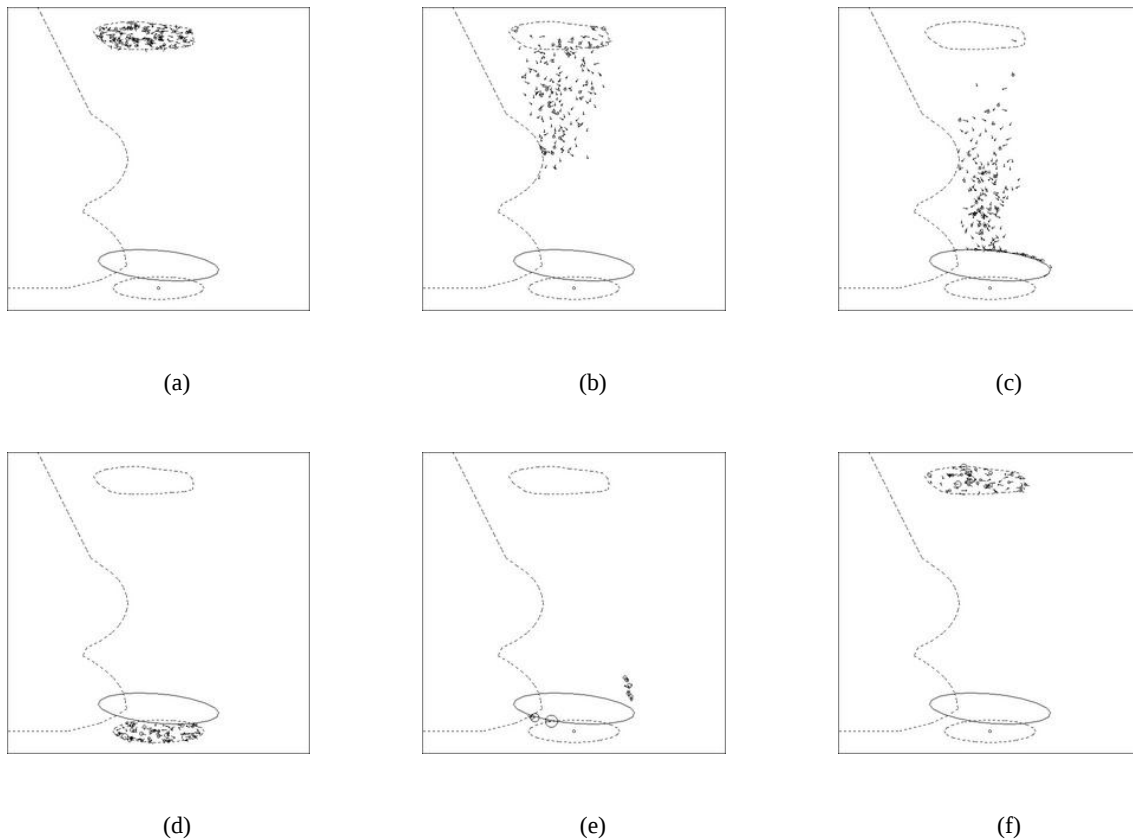
$$\frac{dE}{dt} = sf(x, y) \quad (10)$$

þar sem E er orkan, $f(x, y)$ fæðupéttleikinn í (x, y) og s er fasti.

Reiknilíkanið samanstendur því af jöfnum (2)-(10) ásamt því að ákvarða þarf stuðla (vogtölur) í kúptu samantektinni á hitastigsstigli og fæðustigli sem myndar vigurinn q , og gildi á α -stuðlinum í jöfnu (4). Einnig þarf að skilgreina jaðra, hitastigssvið og fæðusvið, fastann í jöfnu (10), orkuþröskuldinn sem ákvarðar hvenær hrygningargangan fer af stað, og stuðlana sem skilgreina þéttiföllin tvö (sjá jöfnur (6)-(9)).

Mynd 5 sýnir eina hermun með reiknilíkaninu þar sem reynt er að líkja eftir hrygningargöngu og síðan göngu aftur á fæðustöðvarnar. Fæðustöðvarnar eru efst á myndinni og hrygningarstöðvarnar neðst, rétt neðan við hindrun, sem við getum litið á sem eyju. Vinstra megin á svæðinu er hitastigsjaðar, sem fiskar fara síður yfir, þ.e. jaðar með fráhrindiskilyrðum. Í upphafi eru allir fiskarnir á fæðustöðvunum, en hrygningargangan hefst þegar orkulágmarkinu er náð og stefnusuðið verður virkt. Stefususuðið dregur fiskana í áttina að hrygningarstöðvunum. Fiskarnir neyðast til að fara kringum eyjuna og hitastigsjaðarinn beinir flestum þeirra réttisælis. Þegar hrygningu er lokið halda torfurnar aftur í átt að fæðuslóðinni, en nú er það stigulsvið fæðunnar sem beinir þeim þangað þar sem fæðan er þéttust, þ.e. upp eftir fæðufletinum uns komið er á svæði þar sem þéttleikinn er nægjanlega hár. Innan þess svæðis er ekkert sem beinir fiskunum í átt að meiri þéttleika. Á meðan á fæðugöngu og fæðuleit stendur er stefnusviðið óvirkt, þ.e. suðið hefur jafna dreifingu. Ef hitastigsjaðarinn færir lengra til vinstri, fer hluti göngunnar rangsælis umhverfis eyjuna. Þetta kemur heim og saman við hrygningargöngu loðnu, en sum ár fer hluti hrygningargöngunnar vestur með landinu.

Líta má á þetta kerfi sem sjálfvirkt stýrikerfi (e. control system) sem er stjórnað af nokkrum stýri-breytum sem taka gildin 0 eða 1, þ.e. annaðhvort er



Mynd 5. Hermun á göngum milli fæðustöðva og hrygningastöðva Punktalínan til vinstri táknar hitaskil sem fiskurinn fer ekki yfir: **(a)** allur fiskur á fæðuslóð; **(b)** hrygningarganga til suðurs hafin; **(c)** fremsti hluti göngunnar kominn að eyju og fer réttsælis umhverfis hana; **(d)** allur fiskur kominn á hrygningarstöðvarnar; **(e)** gangan norður á fæðuslóð hafin (ath. stórir hringir tákna þéttar torfur); **(f)** allur fiskur kominn aftur á fæðuslóð. Sjá nánar í megintexta.

kveikt á þeim eða slökkt. T. d. kviknar á stefnusuðinu ($\kappa_\theta = 1$) þegar orkulágmarki er náð og slökknar á því ($\kappa_\theta = 0$) þegar komið er á hrygningarslóð. Á meðan á hrygningargöngu stendur er stigulsviðið óvirkt þ.e. $\alpha = 1$, nema við jaðra, en þegar hrygningu er lokið verður stigulsviðið virkt þ.e. $\alpha < 1$

Samfellt aflfræðilíkan

Velta má upp þeirri spurningu hvort eðlilegra eða heppilegra sé að lýsa fiskigöngum með líkani sem er samfellt í tíma og massa, þ.e. þéttleiki og hraði eru samfelldar stærðir í tíma og rúmi.

Í stað þess að skoða einstaka fiska og færslu þeirra skulum við líta á þéttleika, þ.e. $\rho(t, x, y, m)$, þar sem

m ($0 \leq m \leq 1$) er innra ástand fisksins t.d. hrognafylling. Þá er heildið af ρ yfir tiltekið svæði í xy plani (og yfir $0 \leq m \leq 1$) massi fiska á því svæði. Þéttleikinn uppfyllir varðveislujöfnuna

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho v) + \frac{\partial (G\rho)}{\partial m} = 0 \quad (11)$$

þar sem v er hraðavigur og G er hraði breytinga á hrognafyllingu, þ.e. $\frac{dm}{dt} = G$.

Hraðanum má lýsa með jöfnu fyrir varðveislu skriðþunga, sem rita má (til einföldunar skulum við sleppa að líta á v og ρ sem föll af m , þ.e. $v = v(t, x, y)$ og $\rho = \rho(t, x, y)$)

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \nabla)v = \frac{1}{\rho} (\text{kraftar}) \quad (12)$$

Athugið að vinstri hliðin er heildarafleiða hraðans (e. total derivative). Lítum nú á hvernig skilgreina má krafta sem eru að sumu leyti hliðstæðir þeim sem komu við sögu í strjála líkaninu. Gefum okkur að ν_p og $p = (p_1, p_2)$ séu kjörferð og kjörstefna, sbr. hliðstæðar stærðir í strjála líkaninu og skoðum áhrif *kraftsins*

$$\rho \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} v = \rho(av + b\hat{v}) \quad (13)$$

þar sem $\hat{v}$ er þvervigur v . Fyrri liður hægri hliðar jöfnunnar gefur kraftinn í stefnu hreyfingarinnar og sá síðari hornrétt á hreyfingarstefnuna, þ.e. snúningskraftinn. Ef við setjum

$$a = \log \left(\left(\frac{\nu_p}{|v|} \right)^{\frac{1}{\tau_a}} \right) \quad \text{og} \quad b = \frac{1}{\tau_b} \sin^{-1} \left(\frac{v_1 p_2 - v_2 p_1}{|v|} \right) \quad (14)$$

þá er ljóst að ferðin $|v|$ eykst ef hún er minni en kjörferðin ν_p og öfugt. Sömu leiðis verður snúningskrafturinn meiri eftir því sem hornið milli hraðans v og kjörstefnu p er stærra. Þetta horn er

$$\phi = \sin^{-1} \left(\frac{v_1 p_2 - v_2 p_1}{|v|} \right).$$

Stuðlarnir τ_a og τ_b eru tímafastar sem gefa dæmigerðan viðbragðstíma í hreyfingarstefnuna og þvert á hana. Ef við látum kjörferð og kjörstefnu vera samsetta af annars vegar, meðalgildi hraðans yfir tiltekið svæði og hins vegar stefnu sem ræðst af stigulsviði, þá er komin hliðstæða við strjála líkanið. Ef jafnframt er gert ráð fyrir sveimi verður líkanið

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \nabla)v = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} v + \kappa \nabla^2 v \quad (15)$$

Sveimið er að nokkru leyti hliðstætt suðinu í strjála líkaninu og ef gert er ráð fyrir misátta (e. anisotropic) sveimi þá fæst hliðstæðan við stefnusuðið. Einnig má bæta við lið sem stendur fyrir fráhrindi- og aðdráttarkraft, þ.e. $d(\rho - \rho_p)\nabla\rho$ þar sem ρ_p er kjörþéttleiki fiskanna og d er tiltekinn stuðull. Fiskarnir geta ekki yfirgefið svæðið og því er eðlilegt að Neumann skilyrði (þ.e. ekkert flæði) eigi við á jöðrunum. Þetta jöfnuhneppi, má svo leysa með bútaaðferðum (e. finite elements). Sjá nánari lýsingu í [12] ásamt myndum af nokkrum hermum.

Líkindalíkan

Lítum loks á annað líkan, sem grundvallast á slembigangi í plani [13]. Það líkan er leitt út með því að yfirfæra lýsingu á hreyfingu einstakra agna yfir í hreyfijöfnur sem lýsa breytingum á samfelldum (líkinda) þéttleika, svokallaðar Kolmogorov jöfnur eða Fokker-Planck jöfnur, sjá [14] eða [15]. Hugsum okkur ögn (eða fisk) sem færast með slembigangi. Í tímapunktum $n\tau$, $n = 0, 1, 2, \dots$, getur ögnin annað hvort færst um vegalengd Δ í hvaða stefnu θ sem er eða staðið í stað. Látum $q(x, y, t)$ vera líkur á því að ögnin færst úr stað ef hún er í (x, y) á tíma t og gerum ráð fyrir að þéttifallið fyrir stefnuhornið θ sé á forminu

$$p(x, y; \theta) = a(x, y; \theta) + \Delta b(x, y; \theta) \quad \theta \in [-\pi, \pi[\quad (16)$$

Við gerum ráð fyrir að $a(x, y; \theta + \pi) = a(x, y; \theta)$ og $b(x, y; \theta + \pi) = -b(x, y; \theta)$ þ.e. að a sé er samhverfi hluti p við snúning um π og b sé andsamhverfi hlutinn. Athugið að andsamhverfi hlutinn stefnir á 0, þegar færslan Δ í hverju skrefi stefnir á núll. Þessi forsenda er nauðsynleg til að hægt sé að taka markgildi líkt og gert er hér á eftir. Gera má ráð fyrir að öll þessi föll séu einnig háð tíma, en við ritum það ekki beint í þessari framsetningu.

Það er ljóst að vegna þess að p er þéttifall fyrir öll Δ , þá verður að gilda að $\int_{-\pi}^{\pi} b(x, y; \theta) d\theta = 0$. Andsamhverfuskilyrðið á b tryggir þetta. Gerum nú ráð fyrir að $u(x, y, t)$ sé þéttifall staðsetningar agnarnnar á tíma t . Þá er

$$u(x, y; t + \tau) = q(x, y) \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{p}(\theta) \tilde{u}(\theta) d\theta + (1 - q(x, y))u(x, y; t)$$

þar sem

$$\tilde{p}(\theta) = p(x - \Delta \cos \theta, y - \Delta \sin \theta; \theta) \quad \text{og} \quad \tilde{u}(\theta) = u(x - \Delta \cos \theta, y - \Delta \sin \theta; t).$$

Með því að rita fyrstu liði Taylor raðar u og láta Δ og τ stefna á núll þannig að

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0, \tau \rightarrow 0} \frac{\Delta^2}{\tau} = D_0 \quad (17)$$

er til, fæst Kolmogorov jafnan

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}(c_1 u) - \frac{\partial}{\partial y}(c_2 u) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}(D_1 u) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(D_2 u) + 2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}(D_{12} u) \quad (18)$$

Hér er

$$\begin{aligned}
c_1(x, y) &= D_0 q(x, y) \int_{-\pi}^{\pi} \cos \theta \cdot b(x, y; \theta) d\theta \\
&= \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{E[\Delta x]}{\tau} \\
c_2(x, y) &= D_0 q(x, y) \int_{-\pi}^{\pi} \sin \theta \cdot b(x, y; \theta) d\theta \\
&= \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{E[\Delta y]}{\tau} \\
D_1(x, y) &= \frac{D_0}{2} q(x, y) \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 \theta \cdot a(x, y; \theta) d\theta \\
&= \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{E[\Delta x^2]}{2\tau} \\
D_2(x, y) &= \frac{D_0}{2} q(x, y) \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 \theta \cdot a(x, y; \theta) d\theta \\
&= \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{E[\Delta y^2]}{2\tau} \\
D_{12}(x, y) &= \frac{D_0}{2} q(x, y) \int_{-\pi}^{\pi} \cos \theta \sin \theta \cdot a(x, y; \theta) d\theta \\
&= \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{E[\Delta x \Delta y]}{2\tau}
\end{aligned} \tag{19}$$

þar sem $\Delta x = \Delta \cos \theta$ og $\Delta y = \Delta \sin \theta$ eru færslur í x - og y -stefnur og $E[x]$ táknar væntigildi x (e. expected value). Athugið að fyrstu tvær jöfnurnar í (19) sýna að líta má á vígurinn c sem hraðavígur.

Ef gert er ráð fyrir að ekkert flæði sé gegnum jaðar lausnarsvæðisins (þ.e. ögnin getur ekki yfirgefið það) fæst jaðarskilyrðið

$$\begin{aligned}
&\left(-c_1 u + \frac{\partial}{\partial x}(D_1 u) + \frac{\partial}{\partial y}(D_{12} u) \right) n_1 \\
&+ \left(-c_2 u + \frac{\partial}{\partial y}(D_2 u) + \frac{\partial}{\partial x}(D_{12} u) \right) n_2 = 0
\end{aligned} \tag{20}$$

þar sem (n_1, n_2) er þvervígur á jaðar svæðisins.

Gerum nú ráð fyrir að *kjörstefnusvið* sé gefið, þ.e. stefna sem best er fyrir fiskinn að taka í sérhverjum punkti (x, y) . Kjörstefnusviðið verður skilgreint hér á eftir. Þetta stefnusvið getur verið háð ýmsum þáttum s.s. hitastigi, fæðuþéttleika, stefnu í átt til hrygningarstöðva o.s.frv. Táknnum *kjörstefnuhorn* í (x, y) með $\theta_0(x, y)$. Ef gert er ráð að b sé samhverft um $\theta_0(x, y)$, þ.e. $b(\theta_0 + \theta) = b(\theta_0 - \theta)$, þá er auðvelt að sýna fram á að stefnuhorn hraðavígursins $(c_1(x, y), c_2(x, y))$ er

$\theta_0(x, y)$, þ.e.

$$(c_1, c_2) = \nu(x, y)(\cos \theta_0, \sin \theta_0)$$

þar sem $\nu(x, y)$ er ferð fisksins (agnarinnar). Stefnan er því ákvörðuð og einungis þarf að tilgreina ferðina.

Sveimstuðlana þrjá má rita sem

$$\begin{aligned}
D_1 &= \frac{D_0}{4} q(x, y) + A \cos(2\theta_0) - B \sin(2\theta_0) \\
D_2 &= \frac{D_0}{2} q(x, y) - D_1 \\
D_{12} &= A \sin(2\theta_0) + B \cos(2\theta_0)
\end{aligned}$$

þar sem

$$\begin{aligned}
A &= \frac{D_0}{2} q(x, y) \int_0^\pi a(\theta + \theta_0) \cos(2\theta) d\theta \\
B &= \frac{D_0}{2} q(x, y) \int_0^\pi a(\theta + \theta_0) \sin(2\theta) d\theta
\end{aligned}$$

Ef a er samhverft um kjörstefnuhornið $\theta_0(x, y)$, þá er $B = 0$.

Ef búið er að skilgreina $\theta_0(x, y)$ í hverjum punkti, þarf því aðeins að tiltaka þrjú föll, ferðina $\nu(x, y)$, þéttifallið $a(x, y, \theta)$ og sveimið $D(x, y) = \frac{D_0}{4} q(x, y)$. Einfaldast er að gera ráð fyrir að $a(x, y, \theta)$ sé þéttifall jafnar dreifingar, þ.e. $a(x, y, \theta) = \frac{1}{2\pi}$ og þar með er $D_{12} = 0$ og $D_1 = D_2$. Líkanið verður þá einfaldlega

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} &= -\nabla \cdot (\bar{c}u) + \Delta(Du) \quad (x, y) \in S \\
u(\bar{c} \cdot \bar{n}) - \frac{\partial}{\partial n}(Du) &= 0 \quad (x, y) \in \partial S
\end{aligned} \tag{21}$$

þar sem $D(x, y) = \frac{D_0}{4} q(x, y)$ og $\bar{c} = (c_1, c_2)$.

Aðeins er eftir að skilgreina hvernig finna má kjörstefnuhornið $\theta_0(x, y)$. Skilgreinum svokallað *þægindafall* (e. comfort function) sem inniheldur alla þætti, s.s. hitastig, fæðumagn, fjarlægð frá hrygningarstöðvum o.s.frv. sem geta haft áhrif á *velliðan* fisksins [16].

$$U(x, y; t) = F(T(x, y; t); f(x, y; t); d_s(x, y; t); \dots) \tag{22}$$

þar sem T er hitastig, f fæðuþéttleiki og $d_s(x, y)$ er fjarlægð til hrygningarstöðvanna sem virka eins og aðdráttarsvæði. Fiskarnir leitast við að fara í átt að hærri U -gildum, þ.e. stefna þeirra er í stefnu stiguls U , $\nabla U(x, y; t)$, sem skilgreinir þá $\theta_0(x, y)$.

Að lokum skulum við líta á eina hermun þar sem líkanið er heimfært á loðnugöngur í Barentshafi. Allt er valið sem einfaldast; gert er ráð fyrir einsátta sveimi þannig að líkan (21) á við; ferðin $\nu(x, y)$ er sett sem fasti - 40 km á sólarhring- og $D=100.8 \text{ km}^2/\text{sólarhring}$ á hrygningarstöðvum og fæðuslóð en $D=0.672$ annars. Hér gerum við ráð fyrir auknu sveimi þegar fiskur er að leita að fæðu eða að heppilegu svæði til að hrygna á, en þessi sveimgildi eru að öðru leyti valin þannig að dreifing loðnunnar verði svipuð og mælingar sýna. Þægindafallið U er einungis háð hitastigi, fæðubéttleika og fjarlægð frá hrygningarstöðvum

$$U(x, y; t) = \alpha_1(t)r(T(x, y; t)) + \alpha_2(t)s(f(x, y; t)) - \alpha_3(t)d_s(x, y; t)$$

þar sem

$$r(T) = \begin{cases} -T^4 & \text{ef } T \leq 0 \\ 0 & \text{ef } 0 \leq T \leq 3 \\ -(T-3)^2 & \text{ef } 3 \leq T \end{cases}$$

og

$$s(f) = \frac{f}{h+f},$$

þar sem h er tiltekinn stuðull. Form fallsins $r(T)$ merkir að kjörhitastig er milli 0° og 3° C og fiskarnir forðast mjög hitastig sem nálgast -1° C , þ.e. þægindafallið minnkar mjög hratt þegar hitastig verður neikvætt, en minnkar hægar fyrir hita ofan við 3° C . Formið á fæðufallinu s felur það í sér að við hátt fæðustig er lítill ávinningur af því að stefna í átt að meiri fæðubéttleika. Um α_2 og α_3 -stuðlana gildir að í sérhverjum tímapunkti er annar þeirra eða báðir núll; $\alpha_3 = 0$ nema meðan á hrygningargöngunni stendur og er einnig núll á svæðinu sem skilgreint er sem hrygningarsvæði; $\alpha_2 = 0$ þegar fiskurinn er á leið frá fæðuslóð á hrygningarstöðvarnar og einnig á svæðinu sem skilgreint er sem fæðuslóð. Hitastigsáhrifin eru alltaf virk, þ.e. $\alpha_1(t) > 0$ fyrir öll t . Hitasviðið er byggt á hitamælingum í Barentshafi 1991-1994. Fæðusviðið er hins vegar tilbúningur, í raun fall sem vex línulega í átt að gefnum punkti á fæðuslóðinni. Þetta er notað sem nálgun á fallinu $s(f)$.

Mynd 6 sýnir reiknaða dreifingu loðnu í Barentshafi yfir eitt ár byggt á þeim forsendum sem lýst er hér að framan. Til að draga úr áhrifum af byrjunardreifingu er dreifingin framreiknuð í eitt ár áður

en niðurstöður eru sýndar. Á fyrstu mynd sem sýnir dreifingu í desember 1990 er loðnan á fæðuslóð milli Svalbarða og Novaya Zemlaya. Mánuði seinna er hrygningargangan hafin og fremsti hluti göngunnar nálgast hrygningarstöðvarnar. Um miðjan mars er meginhlutinn svo kominn á áfangastað, en lítill hluti kemst ekki á hrygningarsvæðið þar sem leiðin er lokuð af tungu heitsjávár. Svæðið þar sem gangan endar og hrygning á sér stað ræðst af hitastiginu. Ganga norður á fæðuslóð tekur svo við að lokinni hrygningu - í raun er það næsta kynslóð sem gengur norður því hrygningarloðna drepst yfirleitt að lokinni hrygningu - og loðnan er svo komin á fæðuslóð milli Svalbarða og Novaya Zemlya í september þar sem hún heldur sig næstu 3 mánuði. Ferillinn sem sýndur er á myndunum er braut massamiðjunar eða væntigildis staðsetningar, þ.e. $\{(\bar{x}(t), \bar{y}(t)) : t > 0\}$ þar sem

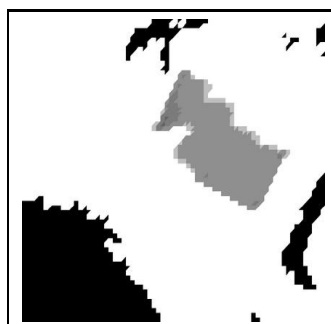
$$\bar{x}(t) = \iint_S xu(x, y, t) dx dy$$

$$\bar{y}(t) = \iint_S yu(x, y, t) dx dy$$

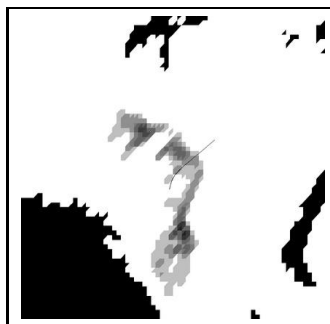
Lokaorð

Hér hefur verið stiklað á stóru í lýsingu á nokkrum göngulíkönunum. Ýmsum spurningum er enn ósvarað, t.d. hvernig best er að bera saman niðurstöður úr líkönunum, hvernig best er að stíka líkönin og hvaða stíka er hægt að meta út frá gögnum og mælingum sem tiltæk eru. Aðeins einföldustu útgáfur samfelldu líkananna hafa verið kannaðar og aðeins hefur verið hermt eftir ferðum nokkur hundruð fiska með strjála líkaninu, en raunverulegar göngur samstanda af mörgum milljörðum. Það er ljóst að ekki er hægt að herma með slíkum fjölda fiska, heldur verður að líta á hvern fisk sem fulltrúa fyrir fleiri milljónir eða tugmilljónir fiska. Hver ögn getur því táknad tugmilljónir fiska. Nú er unnið að áframhaldandi þróun þessara líkana. Næstu skref eru þau að bera saman reiknaða og mælda dreifingu loðnu í Barentshafi og við Ísland og fá þannig mat á stuðlum. Endanlegt markmið er að nota líkön, eins og þau sem hér hefur verið lýst, til prófa tilgátur um áhrif umhverfisskilyrða, svo sem hitastigs, á göngur fiska.

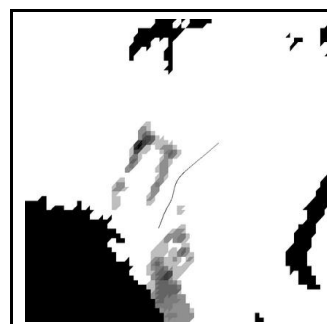
Summary: The spatial distributions and migration patterns of pelagic fish are determined by a number of factors such as environmental conditions (e.g. temperature and food density), boundaries which fish do not cross (e.g. borders between cool and warm water masses), the physiological con-



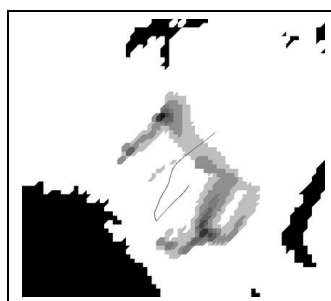
15. desember 1990



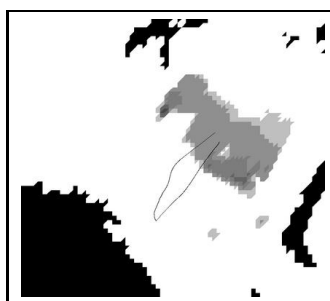
15. janúar 1991



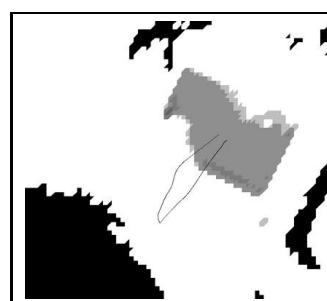
15. mars 1991



1. júní 1991



15. september 1991



15. desember 1991

Mynd 6. Hermun á dreifingu loðnu í Barentshafi í eitt ár. Ferillinn á myndunum er braut massamiðjunnar. Sjá nánar í megintexta.

dition of the fish, such as state of maturity and the location of spawning areas. Three models designed to simulate the spatial distribution and migration patterns for pelagic fish stocks are described. A common feature of all three models is a so-called preferred direction, which is determined by factors, which are internal to the model, as well as by external factors. One of the models is individual based and discrete in time and attempts to emulate the motion of individual fish where the velocity is partly determined by the average velocity of neighbouring fish, partly by a random component or noise making the fish move towards the spawning grounds, and partly by an environmental gradient. The second model is a continuous density-velocity model made up of conservation equations for mass and momentum and a formulation for a force turning the velocity vector in the direction of a preferred direction. The third model is a prob-

ability density model, derived as the continuum limit of a random walk in the plane, leading to an advection-diffusion equation or a Kolmogorov equation. The direction of the velocity vector is given by the gradient of a “comfort function” which incorporates factors such as temperature, food density, distance to spawning grounds, etc., which are believed to affect the behaviour of the fish. An application to the migrations of Barents Sea capelin is presented.

Heimildir

- [1] Hjálmar Vilhjálmsson, The Icelandic capelin stock. *Journal of the Marine Research Institute Reykjavik* **XIII**, No. 1. 281 bls. (1994).
- [2] S. Tjelmeland og B. Bogstad, Biological Modelling, í *Models for Multispecies Management*, (ritstj. T. Rødsethe). Physica-Verlag 1998, bls. 69-91.
- [3] Ø. Fiksen, J. Giske og D. Slagstad, A spatially explicit fitness-based model of capelin migrations in the Barents Sea. *Fish Oceanogr.* **4**, 193-208 (1995).
- [4] J. Toner og Y. Tu, Flocks, herds and schools: A quantitative theory of flocking. *Physical Review E*, **58**(4): 4828-4858 (1998).
- [5] A. Okubo, Dynamical aspects of animal grouping: swarms, schools, flocks, and herds. *Adv. Biophys.*, **22**, 1-94 (1986).
- [6] D. Grünbaum og A. Okubo, Modelling social animal aggregations, í *Frontiers in Mathematical Biology*, (ritstj. S. Levin). Springer 1994, bls. 296-325.
- [7] O.A. Misund, Hjálmar Vilhjálmsson, S.H. i Jákupstovu, I. Røttingen, S. Belikov, Ólafur Ástþórsson, J. Blindheim, Jón Jónsson A. Krysov, Sven Aage Malmberg og Sveinn Sveinbjörnsson. Distribution, migration and abundance of Norwegian spring spawning herring in relation to the temperature and zooplankton biomass in the Norwegian Sea as recorded by coordinated surveys in spring and summer 1996. *Sarsia* **83**: 117-127 (1998).
- [8] H. Gjøsæter. The population biology and exploitation of capelin (*Mallotus villosus*) in the Barents Sea. *Sarsia* **83**, 453-496 (1998).
- [9] B.L. Partridge, The structure and function of fish schools. *Scientific American*, June 1982, bls. 90-99 (1982).
- [10] T. Vicsek, A. Czirok, E. Ben-Jacob, I. Cohen og O. Shochet, Novel type of phase transition in a system of self-driven particles. *Physical Review Letters*, **75**, No. 6, 1226-1229 (1995).
- [11] S. Hubbard, P. Babak, Sven Þ. Sigurðsson og Kjartan G. Magnússon, A model of the formation of fish schools and migration of fish. Skýrsla Raunvísindastofnunar Háskólans **RH-28-2001** (2001). Samþ. til birtingar í Ecological Modelling.
- [12] Sven Þ. Sigurðsson, Stefán Freyr Guðmundsson, Kjartan G. Magnússon og Petro Babak, A dynamic, continuous density-velocity model of a migrating fish stock. Skýrsla Raunvísindastofnunar Háskólans **RH-25-2002** (2002).
- [13] Kjartan G. Magnússon, Sven Þ. Sigurðsson, Petro Babak, Stefán Freyr Guðmundsson og Eva Hlín Dreksdóttir, A continuous density Kolmogorov type model for a migrating fish stock. Skýrsla Raunvísindastofnunar Háskólans **RH-24-2002** (2002). Samþ. til birtingar í *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, Series B.
- [14] D. Grünbaum, Translating stochastic density-dependent individual behaviour with sensory constraints to an Eulerian model of animal swarming. *J. Math. Biol.* **33**: 139-161 (1994).
- [15] A. Okubo og S.A. Levin. *Diffusion and Ecological Problems*. Springer 2001, 467 bls.
- [16] M.J. Reed og J.G. Balchen. A multidimensional continuum model of the fish dynamics and behaviour: Application to the Barents Sea capelin (*Mallotus villosus*). *Modelling, Identification and Control* **3**, 65-109 (1982).

Um höfundinn: Kjartan G. Magnússon er fæddur 1952. Hann lauk B.Sc. prófi í hagnýttri stærðfræði frá University of St. Andrews í Skotlandi 1976, M.Sc. í stærðfræðilegri stýrifræði frá Control Theory Centre, University of Warwick í Englandi 1977 og doktorsprófi frá sama skóla 1983. Kjartan var sérfræðingur á Raunvísindastofnun Háskólans 1980-'90 og dósent við stærðfræðiskor 1990-'96. Hann hefur verið prófessor frá 1996.

Raunvísindastofnun Háskólans
Dunhaga 3, IS-107 Reykjavík
kgm@hi.is

Móttekin: 15. september 2003