Tímarit um raunvísindi og stærðfræði
1. árg. 2. hefti 2003 – raust.is/2003/2/05

Samband veiði og lengdardreifinga

Guðmundur Guðmundsson

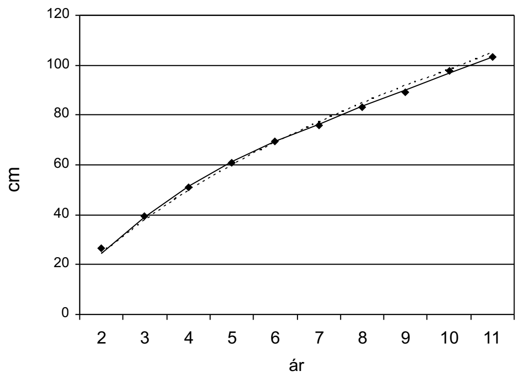
Seðlabanka Íslands og Hafrannsóknastofnun

Vefútgáfa: 18. október 2003

Ágrip – Breytilegar umhverfisaðstæður hafa mikil áhrif á stærðardreifingu innan hvers árgangs fiskstofna. Við sýnum tvenns konar líkön fyrir óreglulega vaxtarferla einstakra fiska þar sem slembiþætti er bætt við vaxtarjöfnur. Lengdardreifing stofns og afla breytist fyrir áhrif dánarstuðla sem eru breytilegir eftir stærð fisksins. Þessu er lýst með hlutafleiðujöfnum. Dæmi eru sýnd þar sem líkt er eftir mælingum á stærðardreifingu Íslandsþorsks.

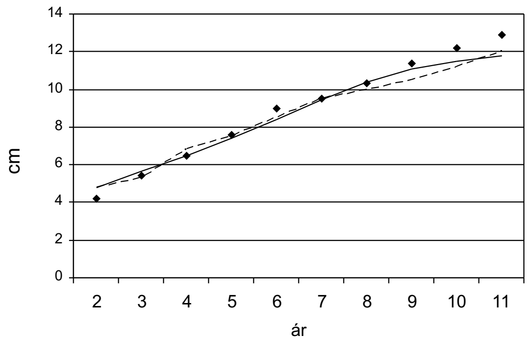
1. Inngangur

Fiskar úr sama árgangi eru misstórir og dreifnin miklu meiri en svarar til aldursmunar innan hvers árgangs. Hún stafar af breytilegum æviferli og mismunandi erfðaeiginleikum. Vitneskja um lengdardreifingu nytjafiska okkar er einkum fengin með mælingum á úrtaki úr veiðum og togararalli. Þær rannsóknir sem hér er fjallað um hafa fyrst og fremst miðast við lengdardreifingu þorsks og áhrif umhverfisþátta á hana. Þar vitum við að breytingar á hita og fæðuframboði hafa sterk áhrif og geta breyst mikið á stuttum tíma. Ársafli og árlegt rall veita engar upplýsingar um reglulegar árstíðabundnar sveiflur og verður ekkert fjallað um þær hér. Mældar meðallengdir og staðalfrávik úr togararalli eru sýnd á myndum 1 og 2. Lengdardreifing veiddra fiska ræðst einnig af miðum og veiðarfærum. Hér er margt gert til að koma í veg fyrir veiðar á smáum fiski og lítið ber á þorski styttri en 50 cm í afla. Í togararalli er notuð smáriðin varpa, en hún nær eingöngu fiski sem er við botn og ljóst að hlutfallslega veiðist minna af ungfiski en eldri fiski. Úrtaksmælingar frá veiðiflota og ralli eru því langt frá því að vera slembiúrtak úr stofni. Vitað er að fyrstu árin verður þorskur fyrir hærri náttúrulegum afföllum en eftir að hann nær veiðanlegri stærð. Dæmi sem hér verða sýnd ná aðeins til fisks frá 2 ára aldri. Lítil bein vitnskja er um afföllin fyrstu árin, en við reiknum með að náttúrulegur dánarstuðull sé 2,0 ár^{-1} fyrir minnsta fisk sem reikningar okkar ná til og lækki línulega í 0,2 við 42 cm lengd og sé fastur eftir það. Eftir 4 ára aldur er miklu líklegra að hann

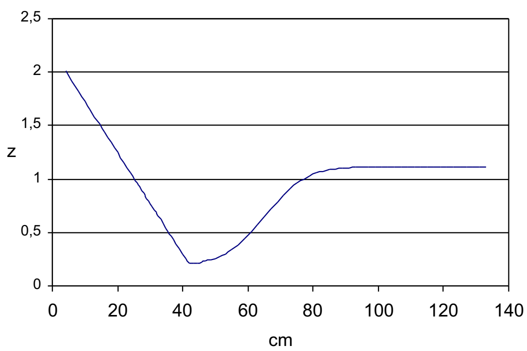


Mynd 1. Stök gildi sýna reiknaðar meðallengdir 2-11 ára þorsks í togararalli. Samfelldur ferill sýnir reiknuð gildi samkvæmt jöfnu 8 og rofinn ferill samkvæmt jöfnu 9.

veiðist en drepist af öðrum ástæðum og þar höfum við allgott mat á dánarstuðlum fyrri ára og nálgum meðalgildi áranna 1990-2000 með dreififalli normaldreifingar margfölduðu með 0,91. Heildardánarstuðull er summa þessara gilda og er hann sýndur á mynd 3. Frá 4-8 ára aldri eða lengdarbili frá tæplega 50 cm til 80 cm hækka dánarlíkur vegna veiða ört með aldri og lengd. Þorskar sem vaxa hratt hafa minni líkur á að ná háum aldri. Stærðardreifingin í hverjum árgangi er svo mikil að breytingin á dánarlíkum eftir stærð hefur heilmikil áhrif á stærðardreifingu stofnsins. Að því marki sem vaxtarhraði er arfgengur er ljóst að veiðar með dánarlíkur háðar stærð geta breytt þróun stofnsins. Áhrifin eru ólík eftir því hvort kynþroski fylg-



Mynd 2. Stök gildi sýna staðalfrávik lengdar 2-11 ára þorsks í togararalli. Samfelldur ferill sýnir reiknuð gildi samkvæmt jöfnu 8 og rofinn ferill samkvæmt jöfnu 9.



Mynd 3. Heildardánarstuðlar þorsks í reikningum í þessari grein.

ir stærð eða aldri, en eru ekki viðfangsefni þessarar greinar.

2. Vaxtarferlar

Í fiskifræði er venjulega gert ráð fyrir að vöxtur fylgi stærð en ekki aldri. Þessu má lýsa með afleiðujöfnu,

$$dx = \mu(x, \theta)dt\,, \tag{1}$$

þar sem x er lengd, t tími, μ vaxtarfall og θ stikar. Algengasta vaxtarfall í fiskifræði er

$$\mu = \alpha(L_\infty - x)\,, \tag{2}$$

kennt við von Bertalanffy (1938). Fiskurinn hefur hámarkslengd, L_∞, og breytist vaxtarhraðinn í hlutfalli við stikann α og muninn á L_∞ og lengd fisksins.

Að gefnu byrjunargildi og stikum gefur lausn á jöfnu 1 fastan vaxtarferil. Nærtæk leið til að lýsa óreglu vegna utanaðkomandi þátta er að bæta slembibreytu við jöfnu (1),

$$dx = \mu(x, \theta)dt + \epsilon(t)dt\,. \tag{3}$$

Formlega má lýsa eiginleikum $\epsilon(t)$ þannig að $E[\epsilon(t)] = 0$ og

$$E[\epsilon(t)\epsilon(s)] = \sigma^2\,\delta(t-s)$$

þar sem $\delta(t)$ er Dirac delta fall. Ef σ er fasti og jafnan leyst fyrir μ úr jöfnu (2) og upphafsgildið $x(0)$ við $t = 0$ fæst

$$x(t) = L_\infty - [L_\infty - x(0)]e^{-\alpha t} + \zeta(t)$$

þar sem

$$\zeta(t) = \int_0^t e^{-\alpha(t-u)}\epsilon(u)du\,.$$

Með vaxandi t stefnir $\zeta(t)$ á fyrstu gráðu eiginaðhverft ferli með meðalgildi 0, dreifni $\sigma^2/(2\alpha)$ og eiginfylgni $e^{-\alpha|\tau|}$ þar sem τ er bil milli tveggja mælinga. Frekari lýsingu á eiginleikum $\epsilon(t)$ og lausn jöfnunnar er víða að finna í bókum um slembiferli og tímaraðir, t.d. Priestley (1981). Prajneshu og Venugopalan (1999) bera þessa lausn saman við mælingar á fiskum.

Jafna (3) með fast σ á illa við lengd fiska samkvæmt von Bertalanffy líkani þegar x fer að nálgast L_∞ því að þá myndi lengd einstakra fiska sveiflast um það gildi samkvæmt eiginaðhverfa ferlinu. Þessu má ráða bót á með því að láta σ vera fall af lengd og $\to 0$ þegar hún nálgast L_∞. Misstórir fiskar verða fyrir sömu umhverfisáhrifum. Þar sem $\epsilon(t)$ er ætlað að lýsa áhrifum óreglulegra þátta í umhverfi á vöxt er galli að þurfa að tengja σ við lengd. Svo er heldur ekki hægt að koma í veg fyrir að jafna (3) feli í sér að fiskur geti styst um hríð ef hún er notuð til að lýsa raunverulegri stærðardreifingu fiska. Það stafar af því að um stuttan tíma Δt er væntanlegur vöxtur $\mu\Delta t$ en staðalfrávik $\sigma\,\sqrt{\Delta t}$. Samdrátturinn einskorðast ekki við mjög lítil gildi og stutt tímabil ef reiknað er með stikum sem gætu átt við raunverulegar mælingar á vexti og dreifingu. Annar alvarlegur galli við þetta líkan til að lýsa áhrifum umhverfisþátta er að eiginfylgni óreglulega þáttarins stjórnast af eiginleikum stofnsins, t.d. stikanum α í von Bertalanffy líkaninu.

Breytum nú vaxtarlíkaninu þannig að sérstök breyta, α, lýsi umhverfisaðstæðum til vaxtar:

$$dx = \mu(x, \alpha, \theta)dt\,. \tag{4}$$

Umhverfisbreytan fylgir slembilíkani,

$$d\alpha = \eta(\alpha, \varphi)dt + \epsilon(t)dt\,, \tag{5}$$

þar sem $\epsilon(t)$ er skilgreint á sama hátt og í jöfnu (3) (en með aðra vídd) og η er fall af α með stika φ. Við höfum litla beina vitneskju um hvaða form þetta fall ætti að hafa, en 1. gráðu eiginaðhverft líkan er einfalt og getur líkt eftir margbreytilegum ferlum og verður látið duga hér. Þá fær jafna (5) formið

$$d\alpha = \gamma(\alpha_0 - \alpha)dt + \epsilon(t)dt \tag{6}$$

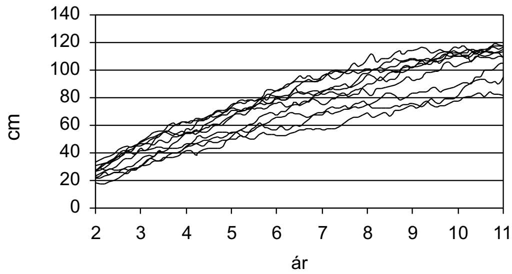
og meðalgildi α stefnir á α_0, dreifnin á $\sigma^2/(2\gamma)$ og eiginfylgnin á $e^{-\gamma|\tau|}$ með vaxandi t. Hér er γ mælikvarði á eiginleika umhverfisins en ekki vaxtarhraða fisksins og lýsir því hvað umhverfisaðstæður til vaxtar breytast ört. Augljóst er að slíkar breytingar geta tekið mjög mislangan tíma. Aðstæður breytast á svipstundu ef þorskur týnir eða finnur loðnutorfu. Heildarmagn loðnu á miðunum er hins vegar breytilegt frá ári til árs. Þorskur er talsvert lengi að flytja sig milli köldu svæðanna fyrir norður- og austurlandi og hlýrri sjávar fyrir sunnan og vestan land. En það getur líka munað miklu á hita um stuttan veg innan hvers svæðis.

Nafn breytunnar α var valið með hliðsjón af von Bertalanffy líkaninu. Ef við hugum að stikum þess virðist eðlilegt að L_∞ ráðist fyrst og fremst af erfðaeiginleikum, en breytilegar umhverfisaðstæður kæmu fram í α sem ræður vaxtarhraða við gefið x. Jafna (6) hefur lausnina

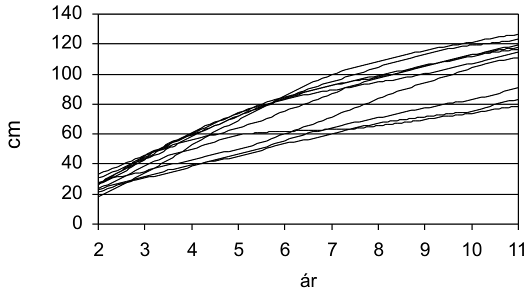
$$\alpha = \alpha_0(1 - e^{-\gamma t}) + \alpha(0)e^{-\gamma t} + \int_0^t e^{-\gamma(t-u)}\epsilon(u)du$$

þar sem $\alpha(0)$ er byrjunargildi við $t = 0$. Ef við setjum von Bertalanffy líkanið inn í jöfnu (4) má leysa hana fyrir þetta α. Eiginleikar slembiþáttarins sem fæst úr því eru mjög ólíkir $\zeta(t)$. Hann stefnir ekki á sístætt ferli en óreglulegar breytingar á lengd deyja út fyrir stór t þó að γ sé fasti. Mynd 4 sýnir nokkra ferla myndaða samkvæmt jöfnu (3) og á mynd 5 eru ferlar samkvæmt jöfnum (4) - (6). (Bæði líkönin umreiknuð í strjál ferli með 10 gildi á ári). Sama von Bertalanffy líkan er notað í öllum ferlunum. Hver ferill á mynd 4 er myndaður með sömu slembitölum og ferill í mynd 5, en mismunandi dreifni. Eftirfarandi stikar voru notaðir við reikningana:

$$\begin{aligned} L_\infty &= 180 \text{ cm} \\ \alpha_0 &= 0,090 \text{ ár}^{-1} \ \ (= \alpha \text{ í jöfnu 3}) \\ \sigma^2 &= 0,0036x(L_\infty - x) \text{ cm}^2 \text{ ár}^{-1} \ \ \text{(í jöfnu 3)} \\ \sigma^2 &= 0,030^2 \text{ ár}^{-3} \ \ \text{(í jöfnum 4-6)} \\ \gamma &= 0,5 \text{ ár}^{-1} \end{aligned}$$



Mynd 4. Vaxtarferlar reiknaðir samkvæmt líkani jöfnu 3.



Mynd 5. Vaxtarferlar reiknaðir samkvæmt líkani jafna 4-6.

Upphafsgildi við 2 ára aldur voru valin úr normaldreifingu með meðallengd 24,5 cm og staðalfrávik 4,8 cm. Í líkani jafna 4-6 var staðalfrávik upphafsgilda α 0,022 ár^{-1} og fylgni við upphafsgildi lengdar 0,25. Gildi γ er ágiskun höfundar en aðrir stikar voru valdir með hliðsjón af mælingunum sem sýndar eru í myndum 1 og 2 í samræmi við jöfnur sem lýst verður í næsta kafla. Þarna er ekki reiknað með neinum breytileika í vaxtarhraða vegna erfðaeiginleika svo að þetta er ofmat á umhverfisáhrifum nema áhrif erfða séu miklu minni.

Eins og fram kemur á myndunum er mikill munur á lögun ferlanna eftir því hvoru líkaninu þeir fylgja. Meðalgildið fylgir von Bertalanffy líkaninu í báðum en óreglulegi þátturinn er ólíkur. Dreifing x á hverjum tíma er svipuð í báðum líkönum, en skammtímabreytingar á lengd eru miklu stærri í fyrra líkaninu.

Við höfum engar mælingar á vaxtarferlum einstakra þorska sem lifa villtir til að bera saman við reiknuðu ferlana. Tvær mælingar með stuttum tímamun á allmörgum fiskum gætu dugað til að greina á milli ofangreindra líkana. Nokkuð fæst af slíkum mælingum þegar merktir fiskar veiðast skömmu eftir merkingu en lengd endurheimtu fiskanna er ekki mæld nægilega nákvæmlega til að þetta gangi.

3. Lengdardreifing stofns

Líkönin í fyrri kafla fela í sér líkindadreifingu x sem fall af tíma. Sú dreifing á við úrtaksrúm þar sem valið er af handahófi úr ferlum samkvæmt þessum líkönum. Hún á hins vegar ekki við stærðardreifingu árganga í fiskstofnum. Þar hefur úrtaksrúmið breyst við að ferlar hverfa úr safninu jafnóðum og fiskarnir deyja og líkurnar á því eru háðar stærð.

Köllum nú lengdarþéttleika stofns af einum árgangi $n(x,t)$. Fjöldinn við t er

$$N(t) = \int n(x,t)dx,$$

þar sem heildað er yfir bil allra mögulegra lengdargilda. Þéttifall lengdardreifingarinnar er

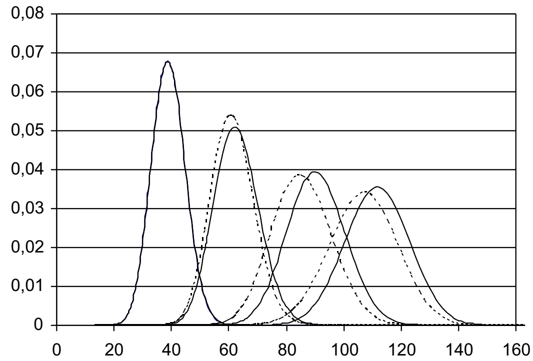
$$f(x,t) = n(x,t)/N(t)\,.$$

Líkurnar á að fiskur sem er lifandi við t deyi á tímabilinu $[t, t+\Delta t]$ eru $z(x,t)\Delta t$ þar sem $z(x,t)$ er heildardánarstuðull fisks af stærð x við tímann t. Gerum nú ráð fyrir að við þekkjum þéttleikann við tímann 0. Ef engin tvístrun á sér stað þannig að hver fiskur vaxi samkvæmt jöfnu (1) fæst þéttleikinn úr afleiðujöfnunni

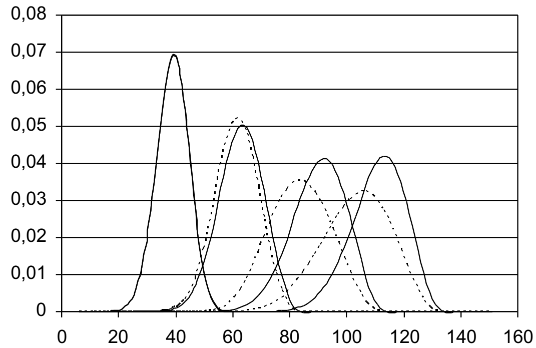
$$\frac{\partial n}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}(\mu n) - zn\,. \qquad (7)$$

Banks og meðhöfundar (1991) fjalla ítarlega um lausn jöfnunnar í þessu sambandi.

Mikið af mælingum í þessum fræðum eru ársgögn. Parma og Deriso (1990) nota líkan hliðstætt jöfnu (3) fyrir strjál gildi til að kanna lengdardreifingar þar sem dánarlíkur fylgja stærð. Þar er mælt árlega



Mynd 6. Þéttifall lengdardreifingar þorsks við 3, 5, 8 og 11 ára aldur, metnar með líkani jöfnu (8). Heilir ferlar eru reiknaðir án veiða, en rofnir með metnum meðalveiðistuðlum 1990-2000.



Mynd 7. Þéttifall lengdardreifingar þorsks við 3, 5, 8 og 11 ára aldur, metnar með líkani jöfnu (9). Heilir ferlar eru reiknaðir án veiða, en rofnir með metnum meðalveiðistuðlum1990-2000.

og reiknað með að allar veiðar fari fram á sama tíma ár hvert. Quinn og Deriso (1999) fjalla einnig um samspil óreglulegs vaxtarhraða og dánartíðni sem er háð stærð á þennan hátt.

Þorskur veiðist allt árið og við notum samfelld líkön. Afleiðujafnan sem svarar til vaxtar samkvæmt jöfnu (3) er

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\sigma^2 n) - \frac{\partial}{\partial x}(\mu n) - zn. \qquad (8)$$

Þetta kunn jafna úr eðlisfræði og lýsir varmaleiðni eða dreifingu efnis við tvístrun og rek. Í líkindafræði lýsir hún slembigöngu með reki.

Líkanið í jöfnum (4) og (5) í fyrri kafla var sett fram til að komast hjá að að líkja eftir vexti einstakra fiska með Browns-hreyfingu eða slembigöngu. Þar þarf þéttleikafallið $n(x, \alpha, t)$ bæði að taka til lengdar og umhverfisaðstæðna svo að

$$N(t) = \iint n(x, \alpha, t) dx\, d\alpha$$

og

$$f(x, t) = \int n(x, \alpha, t) d\alpha / N(t),$$

þar sem heildað er yfir bil allra mögulegra gilda á lengd og umhverfisbreytu. Þarna á tvístrunin við umhverfisbreytuna svo að afleiðujafnan verður

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} (\sigma^2 n) - \frac{\partial}{\partial \alpha} (\eta n) - \frac{\partial}{\partial x} (\mu n) - zn\,. \quad (9)$$

Jöfnur (8) og (9) má leysa tölulega ef byrjunargildi og föllin σ, μ, η og z eru gefin. Þær rannsóknir eru skammt komnar. Myndir 6 og 7 sýna lengdardreifingar, metnar með þeim forritum sem við höfum nú til að leysa jöfnur 8 og 9. Stikar og upphafsgildi eru eins og í ferlunum á myndum 4 og 5. Jaðargildi $n(x, t)$ við lausn á jöfnu (8) voru 0 við $x = 0$ cm og $x = 188$ cm. Jaðargildi $n(x, \alpha, t)$ í jöfnu (9) voru 0 við $\alpha = 0$ og $\alpha = 0,174$ ár^{-1}. Bæði eru sýndar lengdardreifingar án veiði og með metnum veiðistuðlum frá 1990-2000. Samkvæmt þessum lausnum hafa veiðar með þeirri sókn sem hér hefur löngum verið beitt mikil áhrif á lengdardreifingu þorskstofnsins. Við 3 ára aldur eru áhrif veiðanna á lengdardreifingu þó svo lítil að munurinn sést ekki á myndunum. Með vaxandi aldri kemur fram nokkur munur á lögun dreifinganna eftir því hvoru líkaninu er fylgt þannig að þær sem fást með því að leysa jöfnu (9) eru skekktar til vinstri.

4. Niðurstöður

Líkön sem fela í sér mjög ólíka vaxtarferla einstakra fiska geta bæði líkt allvel eftir mældum meðallengdum og dreifni. Áhrif veiða á lengdardreifingu eru sterk og nauðsynlegt að taka tillit til þeirra við mat á vaxtarlíkönum og útreikning á afla á nýliða. Mikið er ógert í sambandi við tölulegar lausnir á líkönunum og samanburð við fyrirliggjandi mælingar. Huga þarf að þætti erfða í lengdardreifingu, bæði frá stærðfræðihliðinni og einnig að kanna vitneskju um hann frá öðrum rannsóknum.

Summary: Variations in environmental conditions, especially food supply and temperature, produce substantial variations in the size of fish within the same cohort. Two models are examined and the joint effects of stochastic growth and size-dependent mortality upon the length distributions are obtained from partial differential equations. The properties of individual growth patterns differ greatly between the models. Both can produce a fair fit with observed means and variances of the length of Icelandic cod from 2-11 years age, but the the development with age of the shape of the distributions differs. With the fishing intensity prevalent in the Icelandic cod fishing the size-dependent fishing mortality has considerable effect upon the length distribution of the stock.

Heimildir

[1] H.T.Banks, L.W. Botsford, F. Kappel og C. Wang, Estimation of growth and survival in size-structured cohort data: an application to larval striped bass (Morone saxatilis), *J. Math. Biol.* **30**, 125-150 (1991).

[2] L. von Bertalanffy, A quantitative theory of organic growth. (Inquiries on growth laws II), *Human Biol.*, **10**, 181-213 (1938).

[3] A.M. Parma og R.B. Deriso, Dynamics of age and size composition in a population subject to size-selective mortality: Effects of phenotypic variability in growth, *Can. J. Fish. Aquat. Sci.*, **47**, 274-289 (1990).

[4] Prajneshu og R. Venugopalan, Von Bertalanffy growth model in a random environment, *Can. J. Fish. Aquat. Sci.*, **56**, 1026-1030 (1999).

[5] M.B. Priestley. *Spectral Analysis and Time Series*, Bindi I, Academic Press, 1981.

[6] T.J.Quinn og R.B.Deriso, *Quantitative Fish Dynamics*, Oxford University Press, 1999.

Um höfundinn: Guðmundur Guðmundsson lauk prófi í eðlisverkfræði frá Verkfræðiháskólanum í Stokkhólmi 1962 og Ph.D. frá Háskólanum í Cambridge 1966. Guðmundur starfar nú við tölfræðirannsóknir hjá Seðlabanka Íslands og Hafrannsóknastofnun. Hann hefur áður starfað hjá Orkustofnun, Háskólanum í Manchester og Háskóla Íslands.

Seðlabanki Íslands
IS-150 Reykjavík
gudmundur.gudmundsson@sedlabanki.is

Móttekin: 8. janúar 2002