Tímarit um raunvísindi og stærðfræði
1. árg. 2. hefti 2003 – raust.is/2003/2/4

Línuleg diffurjöfnuhneppi og setningar Jacobis og Chrystals

Robert J. Magnus

Raunvísindastofnun Háskólans

Vefútgáfa: 19. desember 2003

Ágrip – Setningar frá 19. öld sem kenndar eru við Jacobi og Chrystal lýsa samsetningu lausnarúms línulegra diffurjöfnuhneppa með fastastuðla. Slík hneppi svara til fylkjagildra falla þar sem hvert stak er margliða og diffurvirki er fenginn með því að setja diffurvirkjann D í stað breytunnar z. Sett er fram alhæfing sem byggist á fáguðum virkjagildum föllum í stað fylkjagildra falla, og diffurvirkinn þar sem D kemur í stað z er túlkaður. Virkjarnir verka á Banach rúm sem er hugsanlega óendanlega vítt. Fram kemur alhæfing á niðurstöðum Jacobis og Chrystals. Margfeldni fyrir punkt í rófi virkjagilds falls er lykilhugtak sem leiðir til ýmissa margfeldniskenninga. Margfeldniskenningu fyrir Fredholm-virkja er lýst í smáatriðum og sýnt er að hún er gagnleg fyrir útreikninga jafnvel fyrir endanleg diffurjöfnuhneppi.

1. Setningar Jacobis og Chrystals

Á 19. öld rannsökuðu þýski stærðfræðingurinn C. G. J. Jacobi og breski stærðfræðingurinn G. Chrystal línuleg diffurjöfnuhneppi með fastastuðlum. Dæmi um slíkt hneppi er

$$\begin{aligned}
\frac{d^3y_1}{dt^3} + y_1 + \frac{d^2y_2}{dt^2} - \frac{dy_2}{dt} + y_3 &= 0,\\
\frac{dy_1}{dt} + \frac{d^3y_2}{dt^3} + \frac{d^2y_3}{dt^2} + 5y_3 &= 0,\\
\frac{d^2y_1}{dt^2} + \frac{d^3y_2}{dt^3} + \frac{d^2y_2}{dt^2} - y_2 + \frac{dy_3}{dt} + 2y_3 &= 0.
\end{aligned}$$

Þægilegri ritháttur til þess að tilgreina slík hneppi er fenginn með því að innleiða diffurvirkjann D fyrir d/dt. Hneppið verður þá

$$\begin{bmatrix} D^3+1 & D^2-D & 1\\ D & D^3 & D^2+5\\ D^2 & D^3+D^2-1 & D+2\end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1\\ y_2\\ y_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

og er því af gerðinni

$$A(D)y = 0,$$

þar sem $A(z)$ er fylki með stök sem eru margliður í breytunni z og y er vigurgilt fall.

Jacobi skoðaði slík verkefni í grein sem birtist árið 1865 [5]. Samkvæmt Ince [4] var umfjöllun Jacobis gölluð, en Chrystals lagaði villur hins fræga fyrirrennara síns í ritgerð frá 1895 [1]. Athuganir þeirra snerust aðallega um tvær spurningar:

1. Hver er *röð* hneppisins?
2. Hvenær eru tvö hneppi *jafngild*?

Með *röð* (e. order) hneppisins er átt við fjölda ótilgreindra fasta í almennri lausn. Við vitum að lausnamengið er vigurrúm af vigurföllum, en hugtakið vigurrúm var óþekkt á þessum tíma. Röð hneppisins er því ekkert annað en *vídd* þessa rúms. Dálítið flóknara er að útskýra hvað er átt við með því að tvö hneppi séu jafngild. Það hjálpar ekki að skilgreining Ince á jafngildi er óskýr og jafnvel villandi, en hann er aðalheimild höfundarins. Lítum á tvö hneppi

$$A(D)y = 0 \quad \text{og} \quad B(D)y = 0$$

þar sem $A(z)$ og $B(z)$ er $n \times n$-fylki með margliðustök. Hneppin eru sögð *jafngild* ef til eru $n \times n$-fylki $C_1(z)$ og $C_2(z)$ með margliðustök, þannig að

$$A(z) = C_1(z)B(z) \quad \text{og} \quad B(z) = C_2(z)A(z),$$

og þar með er ljóst að jafngild hneppi hafa sömu lausnir.
Aðalniðurstöður þeirra Jacobis og Chrystals eru eftirfarandi:

1. Röð hneppisins $A(D)y = 0$ er jöfn stigi margliðunnar $\det A(z)$.
2. Tvö hneppi eru jafngild ef og aðeins ef þau hafa sömu lausnirnar.
3. Ef tvö hneppi $A(D)y = 0$ og $B(D)y = 0$ eru jafngild þá er kvóti ákveðanna $\det A(z)/\det B(z)$ fasti sem er ekki 0.

Þó að $\det A(z)/\det B(z) \neq 0$ sé fasti getum við ekki ályktað að hneppin séu jafngild, enda þótt Ince haldi hinu gagnstæða fram (en eins og sagt var áður er hugtakið jafngildi alls ekki skýrt hjá honum). Dæmin eru hneppin

$$\begin{bmatrix} D & 1 \\ 0 & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

sem geta ekki verið jafngild því þau hafa ekki sömu lausnirnar.

2. Diffurvirki virkjagilds falls

Setningar þeirra Jacobis og Chrystals voru sannaðar með því að breyta hneppinu $A(D)y = 0$ í þríhyrningslaga hneppi með því að margfalda vinstramegin með röð af fylkjum af gerðinni $\Phi(D)$ þar sem $\det \Phi(z)$ er fasti annar en 0. Það er sambærilegt við það að nota Gauss eyðingu til að leysa línulegt jöfnuhneppi.

Athugum næst virkjagilt fall $A : \mathbb{C} \to L(E,E)$ þar sem E er Banach rúm yfir $\mathbb{C}$ og $L(E,E)$ táknar Banach rúmið sem samanstendur af öllum samfelldum línulegum virkjunum frá E til E. Við gerum ráð fyrir að fallið A sé fágað. Fáguð föll af z sem taka gildi í Banach rúmi hafa svipaða eiginleika og $\mathbb{C}$-gild fáguð föll. Setning Cauchys gildir og slík föll má liða í veldaraðir með vigurstuðlum. Sú spurning vaknar hvort hægt sé að skilgreina diffurjöfnu $A(D)y = 0$ þó að $A(z)$ sé ekki endilega margliða og rúmið E e.t.v. óendanlega vítt, og sanna setningar Jacobis og Chrystals án þess að nota rök sem eiga einungis við um fylki.

Ef $A(z)$ er ekki margliða, þá þurfum við m.a. að geta túlkað

$$\begin{bmatrix} D^3+1 & \sin D & 1 \\ (D^2+1)^{-1} & D^3 & D^2+5 \\ D^2 & D^{-3} & \cosh D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

sem diffurjöfnuhneppi í svæði sem inniheldur ekki skautin 0, i og $-i$. Almennt ef $A(z)$ er fágað virkjagilt fall, með gildi í $L(E,E)$, hvaða merkingu getum við úthlutað „diffurjöfnuhneppinu“

$$A(D)y = 0?$$

Til að svara því þurfum við að innleiða ákveðinn flokk af föllum. Látum E vera Banach rúm og λ tvinntölu. *Veldisvísismargliða* með veldisvísi λ, stig m og gildi í E er fall af gerðinni

$$y(t) = e^{\lambda t}(u_0 + tu_1 + \cdots + t^m u_m) \tag{1}$$

þar sem $u_0, \ldots, u_m$ eru vigrar í E og $u_m \neq 0$. Rúm allra veldisvísismargliða með veldisvísi λ og stig minna en N með gildi í E er táknað $V_N^\lambda(E)$ og rúm allra veldisvísismargliða með vísi λ er táknað $V_\infty^\lambda(E)$. Almenn veldisvísismargliða er línuleg samantekt af veldisvísismargliðum með e.t.v. ólíkum veldisvísum. Rúm allra veldisvísismargliða er bein summa rúmanna $V_\infty^\lambda(E)$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Mikilvægi þessara falla fyrir línulegar diffurjöfnur með föstum stuðlum liggur í því að allar lausnir á óhliðruðum jöfnum eru veldisvísismargliður.

Látum nú $A(z)$ vera fágað virkjagilt fall með gildi í $L(E,E)$ og fágunarsvæði $\mathcal{D}$. Við skilgreinum diffurvirkjann $A(D)$ þannig að hann verki á $V_\infty^\lambda(E)$ fyrir sérhvert $\lambda \in \mathcal{D}$ með eftirfarandi hætti:

$$A(D)y(t) = e^{\lambda t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^{(k)}(\lambda) f^{(k)}(t), \tag{1}$$

þar sem $y(t) = e^{\lambda t} f(t)$ og f er margliða með stuðla í E. Röðin er samleitin, enda eru allir liðir 0 eftir ákveðinn stað. Takið eftir að þessi skilgreining er þríþætt. Í fyrsta lagi höfum við regluna

$$A(D)(e^{\lambda t} f(t)) = e^{\lambda t} A(\lambda + D) f(t)$$

sem er tilfærsluregla fyrir diffurvirkja. Í öðru lagi höfum við formlegu veldaröðina

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^{(k)}(\lambda) D^k$$

fyrir $A(\lambda + D)$. Í þriðja lagi er veldaröðin látin verka á $f(t)$ með því að túlka D sem diffrun.

Ef $A(z)$ er margliða $\sum_{k=0}^m A_k z^k$ þar sem A_k eru virkjar þá er augljós leið til að láta $A(D)$ verka sem diffurvirkja, nefnilega

$$A(D)y(t) = \sum_{k=0}^{m} A_k D^k y(t) = \sum_{k=0}^{m} A_k y^{(k)}(t). \tag{2}$$

Þetta er í samræmi við ofangreinda skilgreiningu (1).

Samsvörunin milli virkjagildra falla og diffurvirkja er dæmi um *virkjareikning* (e. *operational calculus*). Um er að ræða mótun frá baugi virkjagildra falla til baugs diffurvirkja. Við höfum því reglurnar

$$(A+B)(D) = A(D) + B(D) \quad \text{og} \quad (AB)(D) = A(D)B(D) \tag{3}$$

ef $A(z)$ og $B(z)$ eru fáguð virkjagild föll með sömu formengi $\mathcal{D}$ og með gildum í $L(E,E)$.

Í stað þess að setja fram víðfeðma spurningu þeirra Jacobis og Chrystals um röð jöfnunnar spyrjum við staðbundinnar spurningar: Hver er vídd rúms þeirra lausna verkefnisins $A(D)y = 0$ sem liggja í $V_\infty^\lambda(E)$? Svar við þessari spurningu fæst með því að nota hugtakið margfeldni.

3. Margfeldni virkjagilds falls

Hugtakið margfeldni virkjagilds falls sameinar tvö kunnugleg dæmi: margfeldni rótar λ á jöfnu $f(z) = 0$; og algebrulega margfeldni eigingildis λ virkjans T. Látum E vera Banach rúm og látum $A(z)$ vera fágað fall með gildi í $L(E,E)$ og formengi $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$. Við gerum ráð fyrir að gildi sem $A(z)$ tekur séu virkjar af sérstakri gerð, nefnilega að þau séu *Fredholm virkjar með vísi* 0. Virki $T \in L(E,E)$ kallast Fredholm virki ef kjarni hans $\ker T$ hefur endanlega vídd og myndrúm hans $\operatorname{ran} T$ hefur endanlega hjávídd. Þá er *vísir* virkjans skilgreindur sem $\dim \ker T - \operatorname{codim} \operatorname{ran} T$ og við gerum ráð fyrir að hann sé 0 fyrir gildi fallsins $A(z)$.

Kunnugleg dæmi um Fredholm virkja með vísi 0 eru allir virkjar í $L(E,E)$ ef E hefur endanlega vídd, og virkjar af gerðinni $A+B$ þar sem A er andhverfanlegur og B þjappaður. Við segjum að virki sé andhverfanlegur ef andhverfan er stak í $L(E,E)$. Það nægir ekki að virkinn hafi andhverfu á hlutrúmi í E. Ef $A(z)$ er virkjagilt fall með formengi $\mathcal{D}$ þá er *róf* þess mengi allra $\lambda \in \mathcal{D}$ þannig að $A(\lambda)$ er ekki andhverfanlegur.

Með fyrrgreindum skilyrðum getum við skilgreint margfeldni $A(z)$ í punktinum $\lambda \in \mathcal{D}$. Við fylgjum framsetningunni úr [6]. Runa $(A_n)_{n=0}^{\infty}$ af virkjagildum föllum fæst með þrepun samkvæmt reglunni

$$A_0 = A \qquad \text{og} \qquad A_n(z) = A_{n-1}(z)\big((z-\lambda_0)^{-1}\pi_{n-1} + I - \pi_{n-1}\big), \qquad n \geq 1,$$

þar sem π_{n-1} er samfelldur ofanvarpsvirki með myndrúm $\ker A_{n-1}(\lambda_0)$. Þá setjum við

$$\mu[A;\lambda_0] = \sum_{n=0}^{\infty} \dim(\operatorname{ran}\pi_n).$$

Sýnt var í [6] að runan $(\dim(\operatorname{ran}\pi_n))_{n=0}^{\infty}$ er vel skilgreind, en það þýðir að hún er ekki háð því hvernig ofanvarpsvirkjarnir $(\pi_n)_{n=0}^{\infty}$ eru valdir (það eru yfirleitt margir slíkir virkjar sem hafa tiltekið myndrúm). Runan $(\dim(\operatorname{ran}\pi_n))_{n=0}^{\infty}$ er einhalla minnkandi. Því er $\mu[A;\lambda_0]$ endanlegt ef og aðeins ef til er m þannig að $\pi_m = 0$. Minnsta slík tala m kallast uppstigun A í λ_0. Til eru aðrar leiðir til að skilgreina margfeldni. Sjá [3].

Við tilgreinum hér nokkra eiginleika margfeldninnar. Þessar niðurstöður komu fram í [6].

(1) Ef E hefur endanlega vídd þá er $\mu[A;\lambda_0]$ jöfn margfeldni λ_0 í venjulegum skilningi sem rót á jöfnunni $\det A(z) = 0$.

(2) (*Margfeldissetning*) Ef $A(z) = B(z)C(z)$ fyrir öll $z \in \mathcal{D}$, þá er

$$\mu[A;\lambda_0] = \mu[B;\lambda_0] + \mu[C;\lambda_0].$$

(3) Ef $\mathcal{D}$ er samanhangandi og til er punktur $z \in \mathcal{D}$ þannig að $A(z)$ er andhverfanlegur þá er róf A strjált mengi og samanstendur af punktum með endanlega margfeldni.

(4) Ef $A(z) = zI - T$ þar sem I er samsemdarvörpunin og T fastur virki, og ef Fredholm-skilyrðið er uppfyllt í grennd um $z = \lambda$, þá er margfeldnin $\mu[A;\lambda]$ jöfn algebrulegri margfeldni λ sem eigingildis T. Uppstigunin er minnsta talan m þannig að $\ker(\lambda I - T)^{m+1} = \ker(\lambda I - T)^m$.

Nú getum við svarað spurningunni um *staðbundna röð* jöfnunnar $A(D)y = 0$.

Setning 1. *Rúm allra lausna á $A(D)y = 0$ sem liggja í $V_\infty^\lambda(E)$ hefur vídd $\mu[A;\lambda]$.*

Þessi setning er sönnuð í [8]. Við rekjum hér sönnunina í stórum dráttum. Látum fyrst $A(z) = (z-\lambda)\pi + I - \pi$ þar sem π er ofanvarpsvirki. Diffurjafnan $A(D)y = 0$ er auðleyst og er almenn lausn $y = e^{\lambda t}v$ þar sem v er ótiltekinn vigur í $\operatorname{ran}\pi$. Setningin gildir því í þessu tilfelli. Fyrir almenna tilfellið skrifum við

$$A(z) = A_m(z)P(z)$$

þar sem $A_m(\lambda)$ er andhverfanlegur, m er uppstigunin og $P(z)$ er margfeldið

$$((z-\lambda)\pi_{m-1} + I - \pi_{m-1})((z-\lambda)\pi_{m-2} + I - \pi_{m-2})\ldots((z-\lambda)\pi_0 + I - \pi_0).$$

Hvað varðar lausnir í $V_\infty^\lambda(E)$ jafngildir $A(D)y = 0$ verkefninu $P(D)y = 0$. Sönnunin er fullgerð með þrepun m.t.t. m.

Ef E hefur endanlega vídd og $A(z)$ er margliða, þá leiðir setningin til fyrstu niðurstöðu Jacobis og Chrystals, að rúm allra veldisvísismargliðulausna á $A(D)y = 0$ hefur vídd sem er jöfn stigi margliðunnar $\det A(z)$. Það er vegna þess að með þessum forsendum getum við beitt undirstöðusetningu algebrunnar, setningu 1 og þeirri staðreynd að $\mu[A;\lambda]$ er hæsta veldi af $z - \lambda$ sem deilir $\det A(z)$, til þess að álykta að veldisvísismargliða með vísi λ getur einungis verið lausn ef λ er rót á $\det A(z)$, og ennfremur að ef S_λ er rúm veldisvísismargliðulausna með vísi λ þá er vídd beinu summunnar $\bigoplus_{\lambda\in\mathbb{C}} S_\lambda$ jöfn stigi margliðunnar $\det A(z)$. Þessi beina summa er rúm allra veldisvísismargliðulausna.

Það er vel þekkt að ekki eru til aðrar lausnir en veldisvísismargliður þegar $A(z)$ er margliða og E endanlega vítt rúm. Það er þó erfitt að átta sig á þessu án þess að nota hugtök og staðreyndir úr fylkjareikningi, t.d. þá staðreynd að til er virki $\Phi(z)$ með margliðustök þannig að $\Phi(z)A(z) = \det A(z)I$. Af því leiðir að ef $y(t)$ er lausn á $A(D)y = 0$ þá er sérhvert hnit í $y(t)$ lausn á $\mathbb{C}$-gildu jöfnunni $\det A(D)y = 0$. Allar lausnir á henni eru veldisvísismargliður. Höfundur hefur sýnt fram á að ef $A(z)$ er margliða og hefur í versta lagi skaut í óendanlegu (sem gildir sjálfkrafa í endanlegum víddum) þá eru allar lausnir á $A(D)y = 0$ veldisvísismargliður í alhæfðum skilningi [8].

Skilgreining á margfeldni gerir okkur kleift að reikna lausnirnar á $A(D)y = 0$ sem hafa tiltekinn veldisvísi, án þess að finna almenna lausn. Grunnhugmyndin er að lausn á jöfnunni

$$(\pi D + I - \pi)y = g(t),$$

er gefin með

$$y = (I - \pi)g(t) + \pi \int g(t)\,dt + \pi w \tag{4}$$

þar sem π er ofanvarp og w er frjáls vigur. Gerum nú ráð fyrir að $(A_n)_{n=0}^{\infty}$ sé runa af virkjagildum föllum samkvæmt uppskriftinni

$$A_0 = A \qquad \text{og} \qquad A_n(z) = A_{n-1}(z)\big((z-\lambda_0)^{-1}\pi_{n-1} + I - \pi_{n-1}\big), \qquad n \geq 1,$$

þar sem π_{n-1} er samfelldur ofanvarpsvirki með myndrúm $\ker A_{n-1}(\lambda_0)$. Látum uppstigunina vera m. Þá er

$$A(z) = A_m(z)(\pi_{m-1}(z-\lambda) + I - \pi_{m-1}) \ldots (\pi_0(z-\lambda) + I - \pi_0)$$

þar sem $A_m(\lambda)$ er andhverfanlegt. Veldisvísismargliðan $y(t) = e^{\lambda t}u(t)$ er lausn þá og því aðeins að margliðan $u(t)$ sé lausn á

$$(\pi_{m-1}D + I - \pi_{m-1}) \ldots (\pi_0 D + I - \pi_0)u = 0.$$

Þessi jafna er leyst með því að beita (4) m sinnum í röð.

Þessar hugmyndir gefa skýringu á „táknrænu aðferðinni" sem notuð er til að finna sérlausn á $A(D)y = g(t)$ þegar g er veldisvísismargliða. Aðferðin var kennd í námskeiði höfundarins um diffurjöfnur við Háskóla Íslands á 9. áratugnum [7]. Við viljum t.d. finna sérlausn á $A(D)y = g(t)$ sem er veldisvísismargliða með veldisvísi λ að því gefnu að $g(t)$ sé veldisvísismargliða með veldisvísi λ. Látum $g(t) = e^{\lambda t}h(t)$ þar sem $h(t)$ er margliða af stigi N. Með sömu forsendum og við gáfum okkur áður er $y = e^{\lambda t}u(t)$ þar sem $u(t)$ er margliðulausn á

$$A_m(D+\lambda)(\pi_{m-1}D + I - \pi_{m-1}) \ldots (\pi_0 D + I - \pi_0)u = h(t).$$

Við leysum þessa jöfnu með því að fjarlægja þættina vinstra megin einn í einu. Þar sem $A_m(\lambda)$ er andhverfanlegt fæst í fyrsta skrefi

$$(\pi_{m-1}D + I - \pi_{m-1}) \ldots (\pi_0 D + I - \pi_0)u = A_m(D+\lambda)^{-1}h(t) = \sum_{k=0}^{N} b_k D^k h(t)$$

þar sem $\sum_{k=0}^{N} b_k D^k$ er Taylor-margliða $A_m(D+\lambda)^{-1}$ af stigi N. Síðan er (4) beitt m sinnum. Almennt hefur sérlausnin hærra stig en $g(t)$ en hækkunin er jöfn *uppstiguninni* en ekki margfeldninni. Tilfellið um $\mathbb{C}$-gildar jöfnur sker sig úr og er villandi vegna þess að þá eru uppstigun og margfeldni jafnar. Í lok greinarinnar eru nokkur sýnidæmi reiknuð með þessari aðferð.

4. Hliðrunaróbreytt veldisvísismargliðnarúm

Almennur eiginleiki allra diffurjafna sem eru sjálfstæðar, þ.e. þar sem óháða breytan kemur hvergi fram nema í diffurkvótunum, er að hliðrun lausnar er aftur lausn. Sér í lagi gildir það fyrir diffurjöfnuna $A(D)y = 0$ að lausnarúmið er óbreytt með hliðrun. Það sama gildir um rúm allra lausna sem eru veldisvísismargliður með tiltekinn veldisvísi. Rifjum upp að ef margfeldnin $\mu[A;\lambda]$ er endanleg þá hefur rúm allra veldisvísismargliðulausna með veldisvísi λ víddina $\mu[A;\lambda]$.

Á hinn boginn getum við spurt hvort sérhvert endanlega vítt, hliðrunaróbreytt hlutrúm í $V_\infty^\lambda(E)$ sé rúm veldisvísismargliðulausna með veldisvísi λ á einhverri jöfnu $A(D)y = 0$ og ef svo er hve mikið frelsi liggi í vali á $A(z)$. Eftirfarandi setning er sönnuð í [8].

Setning 2. *Látum S vera endanlega vítt, hliðrunaróbreytt hlutrúm í $V_\infty^\lambda(E)$. Eftirfarandi niðurstöður gilda:*

(1) *Til er fágað virkjagilt fall A, með formengi sem er grennd um λ, þannig að S er rúm allra lausna á $A(D)y = 0$ sem liggja í $V_\infty^\lambda(E)$.*
(2) *Sérhvert fall A í (1) uppfyllir $\mu[A;\lambda] = \dim S$.*
(3) *Ef A og B eru tvö föll sem uppfylla forsendur í (1), þá eru BA^{-1} og AB^{-1} bæði fáguð í grennd um λ.*
(4) *Ef B er fágað í grennd um λ, $B(D)y = 0$ fyrir öll $y \in S$, og A hefur þann eiginleika sem settur var fram í (1) þá er til fágað virkjagilt fall C þannig að $B = CA$.*

Til skýringar á lið 3 má bæta því við að A^{-1} táknar fallið $z \mapsto A(z)^{-1}$. Bæði A^{-1} og B^{-1} hafa skaut í $z = \lambda$ en λ er afmáanlegur sérstöðupunktur fyrir BA^{-1} og AB^{-1}. Liður 2 er endurtekning á setningu 1.

Við skoðum næst afleiðingu af (3) í þessari setningu sem varðar aðra setningu Jacobis og Chrystals. Gefum okkur tvö virkjagild fáguð föll A og B þannig að gildi þeirra séu Fredholm-virkjar með vísi 0 í virkjarúminu $L(E,E)$. Gefum okkur að formengi þeirra sé allt $\mathbb{C}$, og að róf þeirra samanstandi af punktum með endanlega margfeldni (fyrir því nægir að til sé punktur z þannig að $A(z)$ sé andhverfanlegur, og eins fyrir B). Gefum okkur að jöfnurnar $A(D)y = 0$ og $B(D)y = 0$ hafi nákvæmlega sömu veldisvísismargliðulausnirnar. Samkvæmt lið 3 getum við ályktað að AB^{-1} og BA^{-1} séu fáguð á öllu $\mathbb{C}$, þ.e. að þau séu heil fáguð föll. Gefum okkur nú að A og B séu margliður og E sé endanlega vítt rúm. Þá eru AB^{-1} og BA^{-1} ræð föll auk þess að vera heil föll. En rætt, heilt fall er margliða. Niðurstaðan að AB^{-1} og BA^{-1} séu margliður er seinni setning Jacobis og Chrystals. Við tökum eftir aukaniðurstöðu, sem einnig er kennd við Jacobi og Chrystal, að $\det A(z)/\det B(z)$ er fasti og ekki 0, því við höfum að $\det A(z)/\det B(z)$ og $\det B(z)/\det A(z)$ eru margliður og umhverfur hvor annarar; því eru þær fastar.

5. Niðurfelling Fredholm-skilyrðis; margfeldni

Í þessum kafla og þeim næsta fjöllum við um tilfellið þar sem ekki er krafist þess að gildi á $A(z)$ séu Fredholm virkjar. Þessir kaflar eru þyngri en fyrri kaflar, en innihalda lítið af sönnunum. Við látum duga að skýra helstu hugtök, en vísum að öðru leyti í [8].

Við byrjum með upprifjun úr línulegri fellagreiningu. Ef rúmið E er endanlega vítt þá eru allir virkjar á E Fredholm-virkjar með vísi 0. Slíkur virki T er andhverfanlegur ef og aðeins ef kjarni hans er 0 (við endurtökum að virki er andhverfanlegur ef hann hefur andhverfu í $L(E,E)$).

Ef E er óendanlega vítt gildir allt annað. Þá getur andhverfanleiki T brugðist á fleiri vegu en þann að kjarninn sé ekki 0. Til dæmis kann það að vera að myndrúm T sé ekki allt E þó að T sé eintækur, þannig að andhverfi virkinn sé ekki stak í $L(E,E)$.

Róf virkja T er skilgreint sem mengi allra $\lambda \in \mathbb{C}$ þannig að $\lambda I - T$ er ekki andhverfanlegur. Í ljósi þess sem kom fram í síðustu málsgrein eru punktar í rófinu ekki endilega eigingildi (þ.e. ef λ er í rófinu kann það að vera að enginn vigur $v \neq 0$ sé til sem uppfyllir $Tv = \lambda v$). Rófið þarf ekki að vera strjált mengi. Hvaða þjappað hlutmengi í $\mathbb{C}$ sem er getur verið róf einhvers virkja T.

Það má segja að Fredholm-skilyrðið geri það að verkum að róffræði virkjans líkist róffræði ferningslaga fylkis. Þegar við fellum það úr gildi opnast fleiri möguleikar. En í stórum dráttum getum við sagt að hlutverk eigingildanna færist yfir á *takmörkuð, einangruð hlutmengi rófsins*.

Snúum okkur næst að virkjagildum föllum með gildum í $L(E, E)$. Þegar Fredholm-skilyrðið var til staðar úthlutuðum við punktum margfeldni. En þegar Fredholm-skilyrðið er ekki til staðar úthlutum við takmörkuðum, einangruðum hlutmengjum í rófinu margfeldni [8]. Þessi margfeldni er ekki náttúrleg tala, hún er ekki óendanleg tala, en hún er Banach rúm, nákvæmara orðað er hún einsmótunarflokkur af Banach rúmum. Endanlega víð Banach rúm eru flokkuð eftir vídd; tvö sem hafa sömu vídd eru einsmóta (e. *isomorphic*). Þess vegna er margfeldni náttúrleg tala þegar Fredholm-skilyrðið er fyrir hendi.

Takmarkað, einangrað hlutmengi í rófi fágaðs virkjagilds falls A er alltaf sniðmengi $\Omega \cap \Sigma$ þar sem Σ er rófið og Ω opið takmarkað mengi í $\mathbb{C}$ þannig að jaðar þess inniheldur enga punkta úr Σ. Við köllum slíkt opið takmarkað mengi *leyfilegt mengi* fyrir A og (A, Ω) *leyfilega tvennd*. Það breytir engu að úthluta leyfilegri tvennd (A, Ω) margfeldni og við táknum hana $m(A, \Omega)$. Auðvitað er átt við margfeldni mengisins $\Omega \cap \Sigma$. Þetta verður sjónarmið okkar héðan í frá. Yfirleitt skiptir ekki máli hvort litið er á $m(A, \Omega)$ sem Banach rúm eða einsmótunarflokk.

Það er hægt að skilgreina $m(A, \Omega)$ á marga vegu en við förum ekki út í þá sálma hér. (Sjá [8].). Við skráum hér nokkra gagnlega eiginleika. Gert er ráð fyrir að Ω, Ω_1, Ω_2 o.s.frv. séu leyfileg mengi.

(1) $m(A, \Omega) = 0$ ef og aðeins ef $A(z)$ er andhverfanlegur fyrir öll $z \in \Omega$.
(2) Ef Ω_1 og Ω_2 eru sundurlæg þá er $m(A, \Omega_1 \cup \Omega_2) = m(A, \Omega_1) \oplus m(A, \Omega_2)$.
(3) (*Margfeldissetning*) Ef Ω er leyfilegt fyrir bæði A og B þá er $m(AB, \Omega) = m(A, \Omega) \oplus m(B, \Omega)$.
(4) Ef $\lambda \in \Omega$ og $A(z)$ er Fredholm-virki fyrir öll $z \in \Omega$ og andhverfanlegur fyrir $\Omega \ni z \neq \lambda$ þá er $m(A, \Omega)$ endanlega vítt og vídd þess er jöfn $\mu[A; \lambda]$.

6. Niðurfelling Fredholm-skilyrðis; diffurjöfnur

Í þessum kafla skýrum við alhæfingu á hugtakinu um veldisvísismargliðu sem er við hæfi þegar Fredholm-skilyrði er ekki til staðar. Í stað þess að byggja á veldisvísismargliðu með veldisvísi λ notum við veldisvísismargliðu með veldisvísi í menginu U.

Látum U vera opið mengi í $\mathbb{C}$. Fallarúmið $\mathcal{F}(U, E)$ er rúm allra falla $y(t)$ sem hægt er að skrifa sem heildi

$$y(t) = \int_{\mathbb{C}} e^{tz}\, dm(z),$$

þar sem m er E-gilt Borel-mál með þjappaða stoð í U.

Hér er notað hugtakið um heildi m.t.t. vigurgilds máls. Fjallað er um þetta í bókinni eftir Dunford og Schwartz [2]. Hugmyndin að baki þessari skilgreiningu er einföld. Tökum fyrst fallið $y(t) = e^{\lambda t}u$ þar sem u er vigur í E; það er einfaldasta dæmi um veldisvísismargliðu. Það má skrifa á þessu formi þar sem m er málið sem úthlutar Borel-mengi vigrinum u ef það inniheldur λ en 0 annars. Fallið $y(t)$ er því í $\mathcal{F}(U, E)$ fyrir öll opin mengi U sem innihalda λ. Lítum næst á fallið $y(t) = e^{\lambda t}t^k u$. Látum U vera opið mengi sem inniheldur λ og látum D vera lokaða skífu í U með jaðarhring σ. Fallið má skrifa með hjálp heildisreglu Cauchys sem heildið

$$\frac{k!}{2\pi i}\int_{\sigma} \frac{e^{tz}u}{(z-\lambda)^{k+1}}dz = \int_{C} e^{tz} dm(z)$$

þar sem m er málið sem úthlutar hverju mengi heildi vigurgilda 1-formsins $(k!/(z-\lambda)^{k+1})(dz/2\pi i)u$ yfir þann hluta hringsins σ sem liggur innan í menginu. Stoð málsins er mengið σ og því liggur $y(t)$ í $\mathcal{F}(U, E)$.

Rúmið $\mathcal{F}(U, E)$ er auðvitað vigurrúm yfir $\mathbb{C}$, en það má líka gefa því grannmynstur. Lýsing á þessu grannmynstri er tæknileg en okkur nægir hér að segja að með því móti verður $\mathcal{F}(U, E)$ að staðkúptu grannvigurrúmi sem ekki er Banach-rúm. Frekari skýringar má finna í [8].

Látum nú A vera fágað virkjagilt fall með formengi U. Við viljum skilgreina verkun $A(D)$ sem diffurvirka á rúminu $\mathcal{F}(U, E)$, en það er dálítið vandasamt. Það er ljóst að verkun $A(D)$ á föll af gerðinni $y(t) = e^{\lambda t}u$ á að vera $A(D)e^{\lambda t}u = e^{\lambda t}A(\lambda)u$. Þá blasir við að skilgreina $A(D)y(t)$ þegar $y \in \mathcal{F}(U, E)$ með

$$A(D)y(t) = \int_{\mathbb{C}} e^{tz}\, A(z)dm(z) \qquad \text{þar sem} \qquad y(t) = \int_{\mathbb{C}} e^{tz}\, dm(z)$$

og m er E-gilt Borel-mál með þjappaða stoð í U. En hér er vandamál á ferðinni. Fallið $y(t)$ ákveður ekki málið m ótvírætt þannig að það er ekki ljóst að $A(D)y(t)$ sé vel-skilgreint með þessum hætti. Reyndar er svo ekki. Tökum til dæmis $U = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ og $A(z) = 1/z$. Fallið 0 hefur þá mismunandi framsetningar, t.d. með málinu $m = 0$, sem leiðir til $A(D)0 = 0$, eða með því að skrifa heildi um einingarhringinn $0 = \frac{1}{2\pi i}\int e^{tz}\,dz$ sem leiðir til $A(D)0 = 1$.

Þetta vandamál hverfur þegar U er einfaldlega samanhangandi.

Setning 3. *Látum $U \subset \mathbb{C}$ vera opið, einfaldlega samanhangandi mengi. Látum A vera fágað $L(E,E)$-gilt fall með formengi U. Þá má skilgreina verkun $A(D) : \mathcal{F}(U,E) \to \mathcal{F}(U,E)$ með*

$$A(D)y(t) = \int_{\mathbb{C}} e^{tz}\,A(z)dm(z) \qquad \text{þar sem} \qquad y(t) = \int_{\mathbb{C}} e^{tz}\,dm(z)$$

og m er E-gilt Borel-mál með þjappaða stoð í U. Verkunin er vel skilgreind og er samfelld línuleg vörpun þegar rúmið $\mathcal{F}(U,E)$ er búið grannmynstrinu sem áður var getið.

Þá höfum við alhæfingu á setningu 2 (2).

Setning 4. *Látum $\mathcal{D}$ vera einfaldlega samanhangandi, $A : \mathcal{D} \to L(E,E)$ fágað og látum $\Omega \subset \mathcal{D}$ vera leyfilegt mengi fyrir A. Gerum ráð fyrir að Ω sé einfaldlega samanhangandi. Þá er rúm lausna á $A(D)y = 0$ sem liggja í $\mathcal{F}(\Omega,E)$ Banach rúm í sínu grannmynstri sem línulegt hlutrúm í $\mathcal{F}(\mathcal{D},E)$, og er það einsmóta $m(A,\Omega)$.*

7. Útreikningar

Hugmyndirnar sem lýst var í 3. kafla má nota til að finna allar lausnir á $A(D)y = 0$ sem hafa tiltekinn veldisvísi án þess að finna fyrst almenna lausn. Einnig má nota þær til þess að finna sérlausn á $A(D)y = h(t)$ þegar $h(t)$ er veldisvísismargliða. Á þetta var bent í lok 3. kafla. Hefðbundin leið til að leysa slík hneppi byggist á því að margfalda vinstramegin með röð af fylkjum $\Phi(D)$, þar sem $\det \Phi(z)$ er fasti annar er 0, í því skyni að breyta hneppinu í annað sem er þríhyrningslaga. Hér er allt annað upp á teningnum.

Við tökum nú nokkur dæmi. Útreikningar með fylki voru gerðir með Maple 7.

Dæmi 1: *Reiknið út allar lausnir í $V^1_\infty(\mathbb{R}^3)$ á*

$$\begin{bmatrix} D^3+1 & D^2-D & 1 \\ D & D^3 & D^2+1 \\ 0 & D+1 & D+2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = 0.$$

Hér er um að ræða

$$A(z) = \begin{bmatrix} z^3+1 & z^2-z & 1 \\ z & z^3 & z^2+1 \\ 0 & z+1 & z+2 \end{bmatrix}$$

Þá gildir að $\det A(z) = z^7 + z^6 - z^5 - z^4 - z^3 + 2z^2 - 1$ og lausnarúmið á $A(D)y = 0$ er 7-vítt. Nú er 1 einföld rót á jöfnunni $\det A(z) = 0$. Það þýðir að þær lausnir sem eru veldisvísismargliður með vísi 1 mynda 1-vítt rúm. Reiknum þetta rúm. Við höfum $A(1) = \left[\begin{smallmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{smallmatrix}\right]$ og núllrúm þess er spannað af $[1,3,-2]^T$. Almennasta lausn á verkefninu $A(D)y = 0$ sem hefur veldisvísi 1 er þá $y(t) = e^t u$ þar sem $u = \alpha[1,3,-2]^T$.

Dæmi 2: *Reiknið sérlausn í $V^1_\infty(\mathbb{R}^3)$ á*

$$\begin{bmatrix} D^3+1 & D^2-D & 1 \\ D & D^3 & D^2+1 \\ 0 & D+1 & D+2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = e^t \begin{bmatrix} 1 \\ t \\ t^2 \end{bmatrix}.$$

Verkefnið hefur sama fylki og í dæmi 1. Það er af gerðinni

$$A(D)y = e^t(u_0 + tu_1 + t^2u_2)$$

þar sem $u_0, u_1, u_2 \in \mathbb{R}^3$. Við leitum sérlausnar af gerðinni $e^t w(t)$ þar sem $w(t)$ er margliðulausn á

$$A(1 + D)w = u_0 + tu_1 + t^2u_2 \tag{5}$$

Við byrjum á því að þátta $A(z) = A_1(z)((z - 1)\pi + I - \pi)$ þar sem π er ofanvarp á núllrúm $A(1)$. Það er engin ástæða til að reikna hér hornrétt ofanvarp, veljum það einfaldasta, t.d. $\pi = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right]$ Einfaldast er að setja $\zeta = z - 1$ en þá er

$$A_1(1+\zeta) = A(1+\zeta)(\zeta^{-1}\pi + I - \pi) = \begin{bmatrix} -2\zeta^2 + 3\zeta + 8 & \zeta^2 + \zeta & 1 \\ -3\zeta^3 - 4\zeta^2 + 2\zeta + 7 & \zeta^3 + 3\zeta^2 + 3\zeta + 1 & \zeta^2 + 2\zeta + 2 \\ -\zeta + 1 & \zeta + 2 & \zeta + 3 \end{bmatrix}$$

Margliðulausn á (5) er því lausn á

$$A_1(1 + D)(\pi D + I - \pi)w = u_0 + tu_1 + t^2u_2$$

sem gefur

$$(\pi D + I - \pi)w = A_1(1 + D)^{-1}(u_0 + tu_1 + t^2u_2).$$

Við þurfum því að liða $A_1(1+D)^{-1}$ í veldi af D upp að D^2. Það jafngildir því að reikna út andhverfu fylkisins

$$\begin{bmatrix} -2D^2 + 3D + 8 & D^2 + D & 1 \\ -4D^2 + 2D + 7 & 3D^2 + 3D + 1 & D^2 + 2D + 2 \\ -D + 1 & D + 2 & D + 3 \end{bmatrix}$$

yfir bauginn $\mathbb{C}[D]/\langle D^3\rangle$. Útkoman er

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{19}{5} & \frac{23}{5} & -\frac{9}{5} \\ \frac{13}{5} & -\frac{16}{5} & \frac{8}{5} \end{bmatrix} + D \begin{bmatrix} \frac{39}{25} & -\frac{48}{25} & \frac{14}{25} \\ \frac{296}{25} & -\frac{347}{25} & \frac{71}{25} \\ -\frac{202}{25} & \frac{239}{25} & -\frac{52}{25} \end{bmatrix} + D^2 \begin{bmatrix} -\frac{341}{125} & \frac{412}{125} & -\frac{41}{125} \\ -\frac{1599}{125} & \frac{1918}{125} & \frac{101}{125} \\ \frac{1088}{125} & -\frac{1316}{125} & -\frac{62}{125} \end{bmatrix}$$

Síðan fæst

$$(\pi D + I - \pi)w = \begin{bmatrix} -\frac{347}{125} + \frac{38}{25}t - \frac{1}{5}t^2 \\ -\frac{2008}{125} + \frac{257}{25}t - \frac{9}{5}t^2 \\ \frac{1396}{125} - \frac{184}{25}t + \frac{8}{5}t^2 \end{bmatrix}$$

og á því finnum við lausnirnar

$$w(t) = \begin{bmatrix} -\frac{347}{125}t + \frac{19}{25}t^2 - \frac{1}{15}t^3 \\ -\frac{967}{125} - \frac{326}{125}t + \frac{27}{25}t^2 - \frac{1}{5}t^3 \\ \frac{702}{125} + \frac{154}{125}t - \frac{8}{25}t^2 + \frac{2}{15}t^3 \end{bmatrix} \qquad \text{og} \qquad y(t) = e^t \begin{bmatrix} -\frac{347}{125}t + \frac{19}{25}t^2 - \frac{1}{15}t^3 \\ -\frac{967}{125} - \frac{326}{125}t + \frac{27}{25}t^2 - \frac{1}{5}t^3 \\ \frac{702}{125} + \frac{154}{125}t - \frac{8}{25}t^2 + \frac{2}{15}t^3 \end{bmatrix}.$$

Dæmi 3: *Reiknið grunn fyrir rúm allra margliðulausna á jöfnunni $A(D)y = 0$ þar sem*

$$A(z) = \begin{bmatrix} -3z^4 + 8z^3 + 7z^2 - 3z & z^2 + z & z^3 \\ -9z^4 + 15z^3 + 9z^2 - 5z - 5 & 3z^2 + 3z + 1 & 4z^3 - 1 + 2z^2 \\ z^2 + 13z - 10 - 4z^3 & z + 2 & 2z^2 + 4z - 2 \end{bmatrix}.$$

Kjarni $A(0)$ er tvívíður, spannaður t.d. af vigrunum $(1,0,-5)$ og $(0,1,1)$. Einfaldasta ofanvarp á þetta rúm er $\pi_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -5 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ og þá fæst

$$A_1(z) = A(z)(z^{-1}\pi_0 + I - \pi_0) = \begin{bmatrix} 2z^3+3z^2+7z-3 & z+1-z^3+z^2 & z^3 \\ 11z^3+5z^2-z-10 & 5z+4-4z^3+2z^2 & 4z^3-1+2z^2 \\ 11z-17+6z^2 & 7-2z^2-2z & 2z^2+4z-2 \end{bmatrix}.$$

Kjarni $A_1(0)$ er 1-víður, spannaður t.d. af $(1,3,2)$. Setjum því $\pi_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ og reiknum síðan

$$A_2(z) = A_1(z)(z^{-1}\pi_1 + I - \pi_1) = \begin{bmatrix} -2z^2+3z+7+z^3 & z+1-z^3+z^2 & z^3 \\ -3z^2+4+4z^3 & 5z+4-4z^3+2z^2 & 4z^3-1+2z^2 \\ -4+2z+2z^2 & 7-2z^2-2z & 2z^2+4z-2 \end{bmatrix}.$$

Nú er $A_2(0)$ andhverfanlegur þannig að margliðulausnir mynda 3-vítt rúm og fást þær allar frá

$$(\pi_1 D + I - \pi_1)(\pi_0 D + I - \pi_0)y = 0.$$

Leysum þetta með því að fjarlægja þættina í röð með hjálp jöfnu (4). Við fáum

$$(\pi_0 D + I - \pi_0)y = \pi_1 u \qquad \text{og} \qquad y = (I - \pi_0)\pi_1 u + t\pi_0\pi_1 u + \pi_0 v$$

þar sem u og v eru frjálsir vigrar. Grunn fyrir margliðulausnir mynda t.d. fastarnir $[1,0,-5]^T$, $[0,1,1]^T$ ásamt lausninni

$$y(t) = (I - \pi_0)[1,3,2]^T + t\pi_0[1,3,2]^T = [t, 3t, 4-2t]^T.$$

Summary: In the 19th century Jacobi and Chrystal studied the solution space of a linear differential equation system with constant coefficients. Such a system corresponds to a matrix valued function of a complex variable z, where each entry is a polynomial, each occurrence of z being replaced by the operator D of differentiation. In this paper we take a matrix free approach and study analytic operator-valued functions, where the operators in question act in a possibly infinite-dimensional Banach space, and interpret the differential operator corresponding to the replacement of z by D. We describe appropriate generalizations of the theorems of Jacobi and Chrystal to this case. This requires the introduction of so-called multiplicity theories, generalizing the notion of multiplicity of an eigenvalue. One of these, for Fredholm operator-valued functions, is described in detail. It is shown that even in finite-dimensional cases based on matrices this theory leads to useful computational techniques for finding solutions.

Heimildir

[1] G. Chrystal,*Trans. Roy. Soc. Edin.*, **38**, s. 163 (1895).
[2] N. Dunford og J. T. Schwartz, *Linear Operators, Part I*, Interscience, 1964.
[3] J. Lopez-Gomez, *Spectral theory and non-linear functional analysis*, Chapman & Hall/ CRC, 2001.
[4] E. L. Ince, *Ordinary Differential Equations*, Dover, 1965.
[5] C. G. J. Jacobi, *J. für Math.*, **60**, s. 297 (1865) eða *Ges. Werke* **5**, s. 193.
[6] R. J. Magnus, A generalization of multiplicity and the problem of bifurcation, *Proc. London Math. Soc.*, (3) **32**, 251-278 (1976).
[7] Robert J. Magnus, *Fyrirlestrar um diffurjöfnur*, www.raunvis.hi.is/˜robmag.
[8] Robert J. Magnus, Operator-valued functions, multiplicity and systems of linear differential equations, skýrsla **RH–20–2001**, Raunvísindastofnun Háskólans, 2001.

Um höfundinn: Robert Magnus er prófessor í stærðfræði við Háskóla Íslands.

Raunvísindastofnun Háskólans
Dunhaga 3
IS-107 Reykjavík
robmag@hi.is

Móttekin: 25. janúar 2002