

Tengiaðferðir í líkindafræði

Hermann Þórisson

Raunvísindastofnun háskólans

Vefútgáfa: 18. október 2003

Ágrip – Tenging er aðferð til að rannsaka eiginleika slembistærða og slembiferla. Þetta er gert með því að „tengja“ þær öðrum stærðum á hentugan hátt, koma þeim sniðuglega fyrir í sama líkindarúmi. Hér er þessi aðferð fyrst kynnt með nokkrum mikilvægum dæmum og síðan eru dregnar útlínur almennra tengifræða fyrir slembiferli með upphaf í einföldum Markov-keðjum og endi í færslugrúpum.

1. Inngangur

Tenging er líkindafræðileg aðferð sem á rætur sínar að rekja aftur á fjórða áratuginn en lá svo mikið til í láginni fram á þann áttunda. Tenging líkist frekar yfirveguðu handverki en sjálfvirkri stórframleiðslu og því hefur þessi aðferð þróast hægt. Nú er þó svo komið að hún er farin að koma við sögu á flestum sviðum jafnt hreinnar sem hagnýttar líkindafræði. Sá sem þetta skrifar hefur unnið að rannsóknum á þessu sviði í rúma tvo áratugi og sendi frá sér bók [4] árið 2000, þar sem tenging er meginþemað.

Segja má að tengiaðferðin gangi út á að rannsaka slembifyrirkæri með því að tengja þau öðrum einfaldari. Hún skiptir líkindafræðilegri röksemdafærslu í tvo hluta: tengihluta þar sem líkindafræðilegt innsæi skiptir höfuðmáli og síðari hluta þar sem unnt er beita einföldum rökum sem ekki krefjast slíks innsæis.

Mörgum finnst þetta líkast galdri, niðurstaðan virðist liggja fyrir áreynslulaust. En áreynslan felst í því að finna réttu tenginguna. Hún er ekki alltaf auðfundin þótt hún blasi oft við þegar hún er fundin.

Hér verður þessi aðferð fyrst kynnt með nokkrum einföldum en mikilvægum dæmum, en í seinni hluta greinarinnar verða svo dregnar upp útlínur almennra tengifræða fyrir slembiferli, með upphaf í einföldum Markov-keðjum og endi í færslugrúpum.

2. Skilgreining

Slembistærð $\hat{X}$ kallast *eintak* af annarri slembistærð X ef $\hat{X}$ hefur sömu dreifingu og X . Þetta er táknað

$$\hat{X} \stackrel{D}{=} X.$$

Látum $X_i, i \in I$, vera safn slembistærða sem ekki þurfa að vera skilgreindar á sama líkindarúmi. Annað safn slembistærða $(\hat{X}_i : i \in I)$, sem allar eru skilgreindar á sama líkindarúmi, kallast *tenging* á $X_i, i \in I$, ef

$$\hat{X}_i \stackrel{D}{=} X_i, \quad i \in I.$$

Tenging er sem sé með gefna jaðardreifingu en samdreifingin getur verið hvernig sem er. Þegar tengiaðferðinni er beitt er kústin að finna samdreifingu sem hentar þeirri hagnýtingu sem stefnt er að.

Hér að ofan þurfa X -in ekki endilega að vera raungildar slembistærðir heldur geta þau verið slembistök í hvaða mælanlegu rúmi sem er, t.d. slembiferli.

3. Hámarkstenging

Ef slembistærðin X hefur þéttleika f og við veljum punkt af handahófi (þ.e.a.s. með jafnri dreifingu) á milli x -ássins og grafs f og látum $\hat{X}$ vera x -hnit hans, þá eru líkurnar á því að $\hat{X}$ sé á tilteknu bili $[a, b]$ tegrið af f yfir þetta bil. Því er $\hat{X}$ með þéttleika f , þ.e.a.s. $\hat{X}$ er eintak af X . Skoðum nú aðra slembistærð Y með þéttleika g . Setjum $\hat{Y} = \hat{X}$ ef punkturinn sem við völdum lendir undir grafi g . Ef hann hinsvegar lendir ekki undir g veljum þá nýjan punkt af handahófi fyrir ofan f og neðan g og látum $\hat{Y}$ vera x -hnit hans. Fyrir öll bil A gildir

$$\mathbf{P}(\hat{Y} \in A) = \int_A f \wedge g + \int_A (g - f)^+ = \int_A g,$$

þar sem $f \wedge g = \min\{f, g\}$ og

$$(g - f)^+ = \max\{g - f, 0\}.$$

Því hefur $\hat{Y}$ þéttleika g , og þar með er $(\hat{X}, \hat{Y})$ tenging á X og Y . Þessi tenging fullnægir

$$\mathbf{P}(\hat{X} = \hat{Y}) = \int f \wedge g$$

og kallast *hámarkstenging* því fyrir hvaða tengingu $(\hat{X}, \hat{Y})$ sem er gildir

$$\mathbf{P}(\hat{X} = \hat{Y}) \leq \int f \wedge g.$$

Þetta sést með því að setja $B = \{x : f(x) \leq g(x)\}$ og leggja saman eftirfarandi ójöfnur:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\hat{X} = \hat{Y}, \hat{X} \in B) \\ \leq \mathbf{P}(\hat{X} \in B) = \int_B f = \int_B f \wedge g \end{aligned}$$

og

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\hat{X} = \hat{Y}, \hat{X} \in B^c) = \mathbf{P}(\hat{X} = \hat{Y}, \hat{Y} \in B^c) \\ \leq \mathbf{P}(\hat{Y} \in B^c) = \int_{B^c} g = \int_{B^c} f \wedge g. \end{aligned}$$

Hámarkstengingu má smíða fyrir hvaða safn slembistaka sem er og tilbrigði við þetta hugtak koma mjög við sögu í tengifræðum fyrir almenn slembistök og slembiferli sem tæpt verður á aftar í þessari grein. Einfalda hagnýtingu á hámarkstengingu er að finna í næsta kafla.

4. Poisson-nálgun

Tvíkostastærð X með stika n og p má nálgast með Poisson-stærð Y með stika np :

$$\text{Bin}(n, p) \approx \text{Poi}(np) \quad \text{ef } np^2 \text{ er lítið.}$$

Auðvelt er að sanna þetta með tengingu. Athugum fyrst $n = 1$. Þá er

$$\mathbf{P}(X = i) = \begin{cases} 1 - p, & i = 0, \\ p, & i = 1, \end{cases}$$

og

$$\mathbf{P}(Y = i) = \begin{cases} e^{-p}, & i = 0, \\ pe^{-p}, & i = 1, \\ p^i e^{-p}/i!, & i > 1. \end{cases}$$

Látum U vera jafnt dreifða á bilið $[0, 1]$. Skilgreinum eintak af X með því að setja

$$X_1 = \begin{cases} 0, & U \leq 1 - p, \\ 1, & U > 1 - p, \end{cases}$$

og eintak af Y með því að setja

$$Y_1 = \begin{cases} 0, & U \leq e^{-p}, \\ 1, & e^{-p} < U \leq e^{-p} + pe^{-p}, \\ \text{o.s.frv.} \end{cases}$$

Nú er $1 - p \leq e^{-p}$ sem gefur ójöfnuna í

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(X_1 = Y_1) &= \mathbf{P}(X_1 = 0) + \mathbf{P}(Y_1 = 1) \\ &= 1 - p + pe^{-p} \geq 1 - p + p(1 - p) = 1 - p^2, \end{aligned}$$

þ.e.a.s.

$$\mathbf{P}(X_1 \neq Y_1) \leq p^2.$$

Látum nú tvenndirnar $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$ vera óháð eintök af (X_1, Y_1) . Þá er $\hat{X} = X_1 + \dots + X_n$ $\text{Bin}(n, p)$ og $\hat{Y} = Y_1 + \dots + Y_n$ $\text{Poi}(np)$ og þar sem

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\hat{X} \neq \hat{Y}) &\leq \mathbf{P}(X_i \neq Y_i \text{ fyrir eitthvert } i) \\ &\leq \mathbf{P}(X_1 \neq Y_1) + \dots + \mathbf{P}(X_n \neq Y_n) \end{aligned}$$

fæst

$$\mathbf{P}(\hat{X} \neq \hat{Y}) \leq np^2.$$

Ef Poisson stiki λ er gefinn og við setjum $p = \lambda/n$ þá fæst

$$\mathbf{P}(\hat{X} \neq \hat{Y}) \leq \lambda^2/n \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Niðurstaðan er því markgildisettning sem segir að

$$\text{Bin}(n, \lambda/n) \rightarrow \text{Poi}(\lambda), \quad n \rightarrow \infty,$$

og nálgunarsetning sem segir að

$$\mathbf{P}(\text{Bin}(n, p) = \text{Poi}(np)) \geq 1 - np^2.$$

Þetta er einfaldasta dæmið um hvernig tenging nýtist við Poisson-nálgun. Þessi nálgun er ágæt en hana má skerpa. Þó að tvenndin (X_1, Y_1) sé reyndar hámarkstenging þá er $(\hat{X}, \hat{Y})$ ekki hámarkstenging þegar $n > 1$. Hægt er að smíða aðra tengingu $(\hat{X}, \hat{Y})$ sem er þannig að $\mathbf{P}(\hat{X} \neq \hat{Y}) \leq p$ fyrir öll n . Um þetta má fræðast í Barbour, Holst og Janson [1].

5. Yfirlit í dreifingu

Athugum slembistærð X með dreifingarfall F . Skilgreinum fallið F^{-1}

$$F^{-1}(u) = \inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq u\}, \quad 0 < u < 1.$$

Takið eftir að ef F er samfelld og stranglega vaxandi þá er F^{-1} andhverfa F . Látum U hafa jafna dreifingu á $[0, 1]$ og setjum $\hat{X} = F^{-1}(U)$. Þá er

$$\mathbf{P}(\hat{X} \leq x) = \mathbf{P}(U \leq F(x)) = F(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

þ.e.a.s. $\hat{X}$ er eintak af X .

Látum nú X og Y vera slembistærðir með dreifingarföll F og G . Ef til er tenging $(\hat{X}, \hat{Y})$ á X og Y þannig að $\hat{X} \leq \hat{Y}$, þá er ljóst að

$$F(x) \geq G(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Ef þetta gildir er sagt að Y yfirgnæfi X í dreifingu, táknað

$$X \leq_D Y.$$

Á hinn bóginn ef $X \leq^D Y$ þá er ljóst að $F^{-1}(U) \leq G^{-1}(U)$, þ.e.a.s. til er tenging $(\hat{X}, \hat{Y})$ á X og Y þannig að $\hat{X} \leq \hat{Y}$.

Þessa tengingu má t.d. nota til að sanna að yfirgnæfing í dreifingu varðveitist við samlagningu óháðra stærða: Ef X_1 og X_2 eru óháðar, Y_1 og Y_2 eru óháðar, $X_1 \leq_D Y_1$, og $X_2 \leq_D Y_2$, þá gildir að

$$X_1 + X_2 \leq_D Y_1 + Y_2.$$

Til að sanna þetta nægir að láta $(\hat{X}_1, \hat{Y}_1)$ og $(\hat{X}_2, \hat{Y}_2)$ vera óháðar tengingar á X_1 og Y_1 og á X_2 og Y_2 þannig að $\hat{X}_1 \leq \hat{Y}_1$ og $\hat{X}_2 \leq \hat{Y}_2$. Þá er $(\hat{X}_1 + \hat{X}_2, \hat{Y}_1 + \hat{Y}_2)$ tenging á $X_1 + X_2$ og $Y_1 + Y_2$ og augljóst að $\hat{X}_1 + \hat{X}_2 \leq \hat{Y}_1 + \hat{Y}_2$ sem þýðir að $X_1 + X_2 \leq_D Y_1 + Y_2$.

Þessi sönnun er gott dæmi um það hvernig tenging leiðir til stuttra og gegnsærra sannana með því að breyta dreifingarvenslum í vensl í hverjum punkti. Ofangreind tenging er einnig gott dæmi um það hvernig tenging gefur innsýn í merkingu dreifingarvensla: Yfirgnæfing í dreifingu er ekkert annað en dreifingarform yfirgnæfingar í hverjum punkti.

Jafngildisniðurstaðan hér að ofan gildir reyndar fyrir slembistök X og Y í hlutröðuðu pólsku rúmi $(E, \mathcal{E})$. Í því tilviki táknar $X \leq_D Y$ að $g(X) \leq_D g(Y)$ fyrir öll raungild vaxandi mælanlegt föll g skilgreind á E :

Setning 1. Látum X og Y vera slembistök í hlutröðuðu pólsku rúmi. Þá gildir að

$$X \leq_D Y,$$

ef og aðeins ef til er tenging $(\hat{X}, \hat{Y})$ þannig að

$$\hat{X} \leq \hat{Y}.$$

Strassen sannaði þetta árið 1965. Sjá setningu 11 í [7].

6. Samleitni í dreifingu

Látum $X_1, X_2, \dots$ og X vera slembistærðir með dreifingarföll $F_1, F_2, \dots$ og F . Ef til er tenging $(\hat{X}_1, \hat{X}_2, \dots, \hat{X})$ á $X_1, X_2, \dots, X$ þannig að

$$\hat{X}_n \rightarrow \hat{X}, \quad n \rightarrow \infty,$$

þá er auðvelt að sanna að fyrir öll x þar sem F er samfelld gildir

$$F_n(x) \rightarrow F(x), \quad n \rightarrow \infty.$$

Þetta kallast *samleitni í dreifingu* og er táknað

$$X_n \xrightarrow{D} X, \quad n \rightarrow \infty.$$

Þekktasta dæmið um svona samleitni er höfuðsetning tölfraðinnar sem segir að stöðluð summa einsdreifðra óháðra stærða stefni í dreifingu á normlega stærð.

Ekki er erfitt að sanna að samleitni í dreifingu hefur í för með sér að fyrir öll u þar sem F^{-1} er samfelld gildir

$$F_n^{-1}(u) \rightarrow F^{-1}(u), \quad n \rightarrow \infty.$$

Með því að láta U hafa jafna dreifingu á $[0, 1]$ og ekki taka þau teljanlega mörgu gildi þar sem F^{-1} er ekki samfelld og setja $\hat{X}_n = F_n^{-1}(U)$ og $\hat{X} = F^{-1}(U)$ fæst tenging sem er þannig að $\hat{X}_n \rightarrow \hat{X}, n \rightarrow \infty$. Þetta þýðir að samleitni í dreifingu er dreifingarform samleitni í hverjum punkti.

Þessi jafngildisniðurstaða gildir fyrir slembistök $X_1, X_2, \dots, X$ í þéttteljanlegu firðrúmi E . Í því tilviki táknar $X_n \xrightarrow{D} X, n \rightarrow \infty$, að

$$\mathbf{E}[g(X_n)] \rightarrow \mathbf{E}[g(X)], \quad n \rightarrow \infty,$$

fyrir öll raungild takmörkuð samfelld föll g skilgreind á E .

Setning 2. Látum $X_1, X_2, \dots$ og X vera slembistök í þéttteljanlegu firðrúmi. Þá gildir að

$$X_n \xrightarrow{D} X, \quad n \rightarrow \infty,$$

ef og aðeins ef til er tenging $(\hat{X}_1, \hat{X}_2, \dots, \hat{X})$ þannig að

$$\hat{X}_n \rightarrow \hat{X}, \quad n \rightarrow \infty.$$

Skorohod [6] sannaði þessa setningu fyrir fullkomin þéttteljanleg firðrúm árið 1956 og Dudley [3] alhæfði hana fyrir þéttteljanleg firðrúm árið 1968.

7. Samleitni þéttleika

Skoðum samfelldar slembistærðir $X_1, X_2, \dots$ og X með þéttleika $f_1, f_2, \dots$ og f sem eru þannig að

$$f_n(x) \rightarrow f(x), \quad n \rightarrow \infty, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Látum $\hat{X}$ hafa þéttleika f og K vera jákvæða, endanlega og heiltölugilda slembistærð sem er óháð $\hat{X}$ og með dreifingarfallið

$$\mathbf{P}(K \leq n) = \int \inf_{k \geq n} f_k.$$

Athugið að $\mathbf{P}(K \leq n) \nearrow 1$ þegar $n \rightarrow \infty$. Látum $\hat{Y}_1, \hat{Y}_2, \dots$ vera óháðar slembistærðir með þéttleika

$$(f - \inf_{k \geq n} f_k) / \mathbf{P}(K > n), \quad n = 1, 2, \dots$$

(Þéttleikinn má verið hver sem er, ef $\mathbf{P}(K > n) = 0$.) Látum einnig $\hat{Y}_1, \hat{Y}_2, \dots$ vera óháðar $\hat{X}$ og K . Setjum nú

$$\hat{X}_n = \begin{cases} \hat{Y}_n, & n < K, \\ \hat{X}, & n \geq K. \end{cases}$$

Þessi tenging er þannig að stærðirnar nálgast ekki bara markgildið $\hat{X}$ heldur renna saman við það og sitja fastar í því það sem eftir er.

Þessari niðurstöðu er ekki unnt að snúa við, því skilyrðið $f_n \rightarrow f, n \rightarrow \infty$, er of þröngt. En takið eftir því að endanleiki K hér að ofan er eingöngu háður því að $\inf_{k \geq n} f_k$ vex upp í f þegar $n \rightarrow \infty$. Þessari niðurstöðu er unnt að snúa við. Og það sem meira er, þessi jafngildisniðurstaða gildir í hvaða rúmi sem er og sönnunin er eins og fyrir samfelldar slembistærðir. Sjá [4].

Setning 3. Látum $X_1, X_2, \dots$ og X vera slembistök í almennu mælanlegu rúmi. Látum $f_1, f_2, \dots$ vera þéttleika $X_1, X_2, \dots$ miðað við eitthvert mál (t.d. miðað við $\mu = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \mu_k$ þar sem μ_k er dreifing X_n). Þá er

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} f_n \quad \text{þéttleiki fyrir } X$$

ef og aðeins ef til er tenging $(\hat{X}_1, \hat{X}_2, \dots, \hat{X})$ og endanleg slembistærð K þannig að

$$\hat{X}_n = \hat{X}, \quad n \geq K.$$

8. Markov-keðjur – Klassíska tengingin

Tengiaðferðin er almennt talin eiga uppruna sinn í grein eftir Doeblin frá árinu 1938 [2]. Doeblin skoðaði reglulegar Markov-keðjur

$$X = (X_n)_{n \geq 0}$$

með endanlegt stöðurúm E og sannaði meginmarkgildissetninguna á eftirfarandi einfalda og gagnsæja hátt.

Smíðum Markov-keðju $X' = (X'_n)_{n \geq 0}$ með sömu færslulíkur og X þannig að hún sé óháð X þar til keðjurnar hittast, köllum þá stund T . Látum X' svo fylgja X eftir T , þ.e.a.s.

$$\theta_T X' = \theta_T X$$

þar sem θ_n , fyrir $n \geq 0$, er hliðrunarvörpunin frá $E^{\{0,1,\dots\}}$ til $E^{\{0,1,\dots\}}$

$$\theta_n(i_k)_{k \geq 0} = (i_{n+k})_{k \geq 0}.$$

Samkvæmt skilgreiningu er X regluleg ef til er $p > 0$ og m þannig að fyrir allar stöður i og j í E gildir

$$\mathbf{P}_i(X_n = j) \geq p.$$

Því eru líkurnar á því að X' sé ekki í sama ástandi og X á stundinni m í mesta lagi $(1-p)$ og með ítrekun fæst

$$\mathbf{P}(T > km) \leq (1-p)^k, \quad k \geq 1.$$

Þar sem $X'_n = X_n$ þegar $n \geq T$ fæst

$$\mathbf{P}(X_n = j, T \leq n) = \mathbf{P}(X'_n = j, T \leq n)$$

og þar með að

$$\begin{aligned} |\mathbf{P}(X_n = j) - \mathbf{P}(X'_n = j)| &\leq \mathbf{P}(T > n) \\ &\leq (1-p)^{n/m} / (1-p). \end{aligned}$$

Þar sem $\max_i \mathbf{P}_i(X_n = j)$ er ekki-vaxandi í n og $\min_i \mathbf{P}_i(X_n = j)$ ekki-minnkandi fæst að $\mathbf{P}(X_n = j)$ á sér markgildi π_j þegar n stefnir á óendanlegt.

Nú orðið er X' yfirleitt látin vera í jafnvægi frá upphafi, þ.e.a.s. $\mathbf{P}(X'_n = j) = \pi_j$ fyrir öll n , og þá er lokasetningin óþörf þar sem

$$\begin{aligned} |\mathbf{P}(X_n = j) - \pi_j| &\leq (1-p)^{n/m} / (1-p) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Takið eftir að við höfum sannað hér að

$$\mathbf{P}(X_n = j) \rightarrow \pi_j, \quad n \rightarrow \infty, \quad \text{með veldishraða.}$$

Þessi tenging kallast *klassíska tengingin* og dugar líka til að sanna meginmarkgildissetninguna þegar stöð-urúmið er teljanlega óendanlegt og X er óþættanleg, lotulaus og jákvætt endurkvæm. Sönnunin á að $\mathbf{P}(T < \infty) = 1$ er þá örlítið flóknari en ójafnan er sú sama og við fáum

$$|\mathbf{P}(X_n = j) - \pi_j| \leq \mathbf{P}(T > n) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Frekari skilyrði þarf til að fá veldishraða í samleitnina.

Þegar X er núll-endurkvæm dugar klassíska tengingin enn til að sanna að

$$\mathbf{P}(X_n = j) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

sjá Kafla 2 í [4].

9. Tenging slembiferla

Klassíska tengingin fyrir Markov-keðjur hefur getið af sér viðamikil tengifræði fyrir almenn slembiferli. Það sem eftir er þessarar greinar verður fjallað lauslega um þau, en ítarlega umfjöllun og sögulegan bakgrunn er að finna í [4]. Til hægðarauka munum við hér einskorða okkur við samfelldan tíma en niðurstöður í þessum kafla og þeim næsta eiga sér augljósa samsvörun í strjálum tíma.

Látum

$$X = (X_s)_{s \in [0, \infty)} \quad \text{og} \quad Y = (Y_s)_{s \in [0, \infty)}$$

vera hægrisamfelld slembiferli í pólsku stöðurúmi $(E, \mathcal{E})$. Við munum líta á X og Y sem slembistök í $(H, \mathcal{H})$ þar sem H er mengi allra hægrisamfelldra falla $x = (x_s)_{s \in [0, \infty)}$ frá $[0, \infty)$ til E og $\mathcal{H}$ er minnsta σ -algebran sem gerir öll ofanvörpin $x \rightarrow x_t, t \in [0, \infty)$, mælanleg miðað við Borel hlutmengi $[0, \infty)$ og E . Skilgreinum hliðranir $\theta_t, t \in [0, \infty)$, frá H til H svona

$$\theta_t x = (x_{t+s})_{s \in [0, \infty)}.$$

Látum $\|\cdot\|$ tákna heildarvik: ef μ and ν eru tvö líkindamál á mælanlegu rúmi $(G, \mathcal{G})$ gildir

$$\|\mu - \nu\| = 2 \sup_{A \in \mathcal{G}} |\mu(A) - \nu(A)|.$$

Ef $\mathcal{K}$ er hlut- σ -algebra í $\mathcal{G}$ tákna $\mu|_{\mathcal{K}}$ einskorðun μ við $\mathcal{G}$. Hala- σ -algebra $\mathcal{H}$ er skilgreind svona

$$\mathcal{T} = \bigcap_{t \geq 0} \theta_t^{-1} \mathcal{H}.$$

Ef $(\hat{X}, \hat{Y})$ er tenging á X of Y og T er slembistund þannig að

$$\theta_T X = \theta_T Y \quad \text{á} \quad \{T < \infty\}$$

kallast T *tengistund*. Þrenndin $(\hat{X}, \hat{Y}, T)$ kallast *nákvæm tenging* á X og Y og hún er sögð vera *heppnuð* ef $\mathbf{P}(T < \infty) = 1$. Klassíska tengingin er dæmi um svona tengingu.

Þar sem $\theta_t X = \theta_t Y$ þegar $t \geq T$ fæst

$$\mathbf{P}(\theta_t X \in \cdot, T \leq t) = \mathbf{P}(\theta_t Y \in \cdot, T \leq t)$$

og þar með að

$$\|\mathbf{P}(\theta_t X \in \cdot) - \mathbf{P}(\theta_t Y \in \cdot)\| \leq 2\mathbf{P}(T > t).$$

Þessi ójafna (*tengitímaójafnan*) er lykillinn að heildarvikssamleitni. Ef til dæmis tengingin er heppnuð fæst

$$\|\mathbf{P}(\theta_t X \in \cdot) - \mathbf{P}(\theta_t Y \in \cdot)\| \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty.$$

Ef Y er þar að auki í jafnvægi (þ.e.a.s. $\theta_t Y \stackrel{D}{=} Y$ fyrir öll t) fæst að X leitar í jafnvægi í heildarvik:

$$\theta_t X \xrightarrow{t\mathcal{Y}} Y, \quad t \rightarrow \infty,$$

hér tákna $\xrightarrow{t\mathcal{Y}}$ heildarvikssamleitni.

Sé vitað t.d. að $\mathbf{E}[T^\alpha] < \infty$ fyrir eitthvert $\alpha > 0$, þá fæst (því $t^\alpha \mathbf{P}(T > t) \leq \mathbf{E}[T^\alpha; T > t]$) eftirfarandi niðurstaða um samleitnihraða

$$t^\alpha \|\mathbf{P}(\theta_t X \in \cdot) - \mathbf{P}(\theta_t Y \in \cdot)\| \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty.$$

Hér er meginjafngildissetningin fyrir nákvæma tengingu.

Setning 4. Eftirfarandi staðhæfingar eru jafngildar:

(a) Til er heppnuð nákvæm tenging á slembiferlunum X og Y .

(b) $\|\mathbf{P}(\theta_t X \in \cdot) - \mathbf{P}(\theta_t Y \in \cdot)\| \rightarrow 0$ þegar $t \rightarrow \infty$.

(c) $\mathbf{P}(X \in A) = \mathbf{P}(Y \in A)$ fyrir $A \in \mathcal{T}$.

Ennfremur gilda þessar staðhæfingar fyrir allar mismunandi útgáfur X og Y af Markov-ferli ef og aðeins ef eftirfarandi jafngildu forsendum er fullnægt:

(d) Markov-ferlið er blendið (e. mixing).

(e) Öll takmörkuð tíma-rúm-þýð föll eru fastar.

(f) $\mathbf{P}(X \in A)$ er 0 eða 1 fyrir öll $A \in \mathcal{T}$ og allar útgáfur X af Markov-ferlinu.

10. Hliðrunartenging

Fernd $(\hat{X}, \hat{Y}, T, S)$ kallast *hliðrunartenging* á X og Y ef $(\hat{X}, \hat{Y})$ er tenging á X og Y , T og S eru slembistundir, $\{T < \infty\} = \{S < \infty\}$ og

$$\theta_T X = \theta_S Y \quad \text{á} \quad \{T < \infty\}.$$

Hliðrunartengingin er *heppnuð* ef $\mathbf{P}(T < \infty) = 1$. Mismunur hliðrunartengistundanna $T - S$ er *hliðrunin*. Líta má á nákvæma tengingu $(\hat{X}, \hat{Y}, T)$ sem sértílvik hliðrunartengingar með því að taka $S = T$ (í þessu fellst "nákvæmnin": ferlin renna saman á sömu stundu, án hliðrunar). Einfalt dæmi um heppnaða hliðrunartengingu sem ekki er nákvæm tenging fæst með því að láta X og Y vera mismunandi útgáfur af óþættanlegri endurkvæmri Markov-keðju: keyrum keðjuna X þar til hún er komið í tiltekið ástand j , köllum þá stund T ; keyrum keðjuna Y þar til hún er komin í j , köllum þá stund S ; keyrum svo keðjurnar saman úr þessu ástandi.

Hliðrunartenging á sér ójöfnu, sem er aðeins erfiðari í útleiðslu en tengistundarójafnan: Látum U vera jafnt dreifða á $[0, 1]$ og óháða X , Y og hliðrunartengingunni $(\hat{X}, \hat{Y}, T, S)$. Þá gildir *hliðrunartengingarójafnan*

$$\|\mathbf{P}(\theta_{tU} X \in \cdot) - \mathbf{P}(\theta_{tU} Y \in \cdot)\| \leq 2\mathbf{P}(T \vee S > Ut).$$

Hér er sem sagt ekki hliðrað í fasta stund t heldur í handahófsvalda stund á bilinu $[0, t]$. Ójöfnuna má umskrifa svona:

$$\begin{aligned} & \left\| \int_0^t \mathbf{P}(\theta_s X \in \cdot) ds - \int_0^t \mathbf{P}(\theta_s Y \in \cdot) ds \right\| \\ & \leq \mathbf{E}[(T \vee S) \wedge t] \quad (\text{sem er } \leq \mathbf{E}[T \vee S]). \end{aligned}$$

Ef hliðrunartengingin er heppnuð fæst nú Cesaro-heildarvikssamleitni:

$$\|\mathbf{P}(\theta_{tU} X \in \cdot) - \mathbf{P}(\theta_{tU} Y \in \cdot)\| \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty.$$

Ef Y er þar að auki í jafnvægi fæst að X leitar í jafnvægi í Cesaro-heildarvik:

$$\theta_{tU} X \xrightarrow{t \vee} Y, \quad t \rightarrow \infty.$$

Sé vitað að $\mathbf{E}[T] < \infty$ og $\mathbf{E}[S] < \infty$, þá fæst

$$\begin{aligned} & \sup_{t \geq 0} \left\| \int_0^t \mathbf{P}(\theta_s X \in \cdot) ds - \int_0^t \mathbf{P}(\theta_s Y \in \cdot) ds \right\| \\ & \leq \mathbf{E}[T] + \mathbf{E}[S] < \infty. \end{aligned}$$

Í stað hala- σ -algebrunnar kemur nú óbreytilega σ -algebran sem er skilgreind svona:

$$\mathcal{I} = \{A \in \mathcal{H} : \theta_t^{-1} A = A, \quad t \geq 0\}.$$

Hér er meginjafngildissetningin fyrir hliðrunartengingu.

Setning 5. *Eftirfarandi staðhæfingar eru jafngildar:*

(a) *Til er heppnuð hliðrunartenging á slembiferlunum X og Y .*

(b) $\|\mathbf{P}(\theta_{tU} X \in \cdot) - \mathbf{P}(\theta_{tU} Y \in \cdot)\| \rightarrow 0$ þegar $t \rightarrow \infty$.

(c) $\mathbf{P}(X \in A) = \mathbf{P}(Y \in A)$ fyrir $A \in \mathcal{I}$.

Ennfremur gilda þessar staðhæfingar fyrir allar mismunandi útgáfur X og Y af Markov-ferli ef og aðeins ef eftirfarandi jafngildu forsendum er fullnægt:

(d) *Markov-ferlið er Cesaro-blendið (e. Cesaro-mixing).*

(e) *Öll takmörkuð þýð föll eru fastar.*

(f) $\mathbf{P}(X \in A)$ er 0 eða 1 fyrir öll $A \in \mathcal{I}$ og allar útgáfur X af Markov-ferlinu.

11. Epsilon-tengingar

Hliðrunartenging $(\hat{X}, \hat{Y}, T, S)$ kallast ϵ -tenging ef ϵ er jákvæð rauntala og

$$|T - S| \leq \epsilon.$$

Í þessu tilviki gildir eftirfarandi ójafna: Látum U vera jafnt dreifða á $[0, 1]$ og óháða X , Y og hliðrunartengingunni $(\hat{X}, \hat{Y}, T, S)$. Þá gildir, fyrir öll t og $h > 0$, ϵ -tengingarójafnan

$$\begin{aligned} & \|\mathbf{P}(\theta_{t+hU} X \in \cdot) - \mathbf{P}(\theta_{t+hU} Y \in \cdot)\| \\ & \leq 2\mathbf{P}(T > t) + 2\epsilon/h. \end{aligned}$$

Hér er sem sagt núllpunkturinn gerður loðinn – eða þjálgaður lítilsháttar – og svo hliðrað í fasta stund t . Ójöfnuna má umskrifa svona:

$$\begin{aligned} & \left\| \int_0^h \mathbf{P}(\theta_{t+s} X \in \cdot) ds - \int_0^h \mathbf{P}(\theta_{t+s} Y \in \cdot) ds \right\| \\ & \leq 2h\mathbf{P}(T > t) + 2\epsilon. \end{aligned}$$

Ef ϵ -tengingin er heppnuð fæst að fyrir $h > 0$ gildir

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{P}(\theta_{t+hU} X \in \cdot) - \mathbf{P}(\theta_{t+hU} Y \in \cdot)\| \leq \epsilon/h.$$

og ef til er heppnuð ϵ -tenging fyrir sérhvert jákvætt ϵ fáum við því þjála heildarvikssamleitni:

Fyrir öll $h > 0$ gildir

$$\|\mathbf{P}(\theta_{t+hU}X \in \cdot) - \mathbf{P}(\theta_{t+hU}Y \in \cdot)\| \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty.$$

Ef Y er þar að auki í jafnvægi fæst að X leitar í jafnvægi í þjálu heildarviki; fyrir öll $h > 0$ gildir

$$\theta_{t+hU}X \xrightarrow{tv} Y, \quad t \rightarrow \infty.$$

Í stað hala- σ -algebrunnar og óbreytilegu σ -algebrunnar kemur nú þjála hala- σ -algebran sem er skilgreind svona:

$$S = \sigma\{f \in \mathcal{T} : f(\theta_t z) \rightarrow f(z), t \rightarrow 0, z \in H\}.$$

Hér er meginjafngildissetningin fyrir epsílon tengingar.

Setning 6. Eftirfarandi staðhæfingar eru jafngildar:

(a) Til er heppnuð ϵ -tenging á slembiferlunum X og Y fyrir öll $\epsilon > 0$.

(b) $\|\mathbf{P}(\theta_{t+hU}X \in \cdot) - \mathbf{P}(\theta_{t+hU}Y \in \cdot)\| \rightarrow 0$ þegar $t \rightarrow \infty$ fyrir öll $h > 0$.

(c) $\mathbf{P}(X \in A) = \mathbf{P}(Y \in A)$ fyrir $A \in S$.

Ennfremur gilda þessar staðhæfingar fyrir allar mismunandi útgáfur X og Y af Markov-ferli ef og aðeins ef eftirfarandi jafngildu forsendum er fullnægt:

(d) Markov-ferlið er þjáltað blendið (e. smoothly mixing).

(e) Öll takmörkuð þjálta tíma-rúm-þýð föll eru fastar.

(f) $\mathbf{P}(X \in A)$ er 0 eða 1 fyrir öll $A \in S$ og allar útgáfur X af Markov-ferlinu.

12. Færslutenging

Það sem hér er sagt að framan um tengingu slembiferla má útvíkka á ýmsan hátt, en hliðrunartenging liggur þar þó best við. Jafngildissetningin fyrir hliðrunartengingu almennra slembiferla gildir í tvíhliða tíma,

$$X = (X_s)_{s \in \mathbb{R}},$$

og þá má einfalda skilgreininguna $\theta_T X = \theta_S Y$ í

$$\theta_R X = Y$$

þar sem $R = T - S$ á $\{|T| < \infty\}$. Setningin gildir líka fyrir slembisvið í mörgum víddum

$$X = (X_s)_{s \in \mathbb{R}^d}.$$

Sú spurning vaknar því hvort þetta eigi ekki við um miklu almennari aðgerðir en hliðrun. Og sú er raunin.

Látum X og Y vera slembistök í almennu rúmi $(E, \mathcal{E})$. Látum G vera staðþjappaða þéttteljanlega granngrúpu með Borel mengi $\mathcal{G}$ og Haar-mál λ . Látum G verka á E þannig að vörpunin sem flytur (γ, x) í γx sé mælanleg miðað við $\mathcal{G} \otimes \mathcal{E}$ og $\mathcal{E}$. Fernd $(\hat{X}, \hat{Y}, \Gamma, C)$ kallast færslutenging á X og Y ef $(\hat{X}, \hat{Y})$ er tenging á X og Y , Γ er slembifærsla og C er atburður þannig að

$$\Gamma X = Y \quad \text{á} \quad C.$$

Færslutengingin er heppnuð ef $\mathbf{P}(C) = 1$. Líta má á hliðrunartengingu fyrir slembiferli í tvíhliða tíma, og fyrir slembisvið í mörgum víddum, sem færslutengingu með því að taka $\Gamma = \theta_R$ og $C = \{|R| < \infty\}$. Dæmi um færslu sem ekki er hliðrun er snúningur slembisviðs.

Færslutenging á sér líka ójöfnu: Látum $B \in \mathcal{G}$ hafa jákvætt og endanlegt Haar-mál og U_B vera slembifærslu sem er óháð X, Y og færslutengingunni $(\hat{X}, \hat{Y}, \Gamma, C)$ og hefur jafna dreifingu á B , þ.e.a.s. dreifinguna $\lambda(\cdot|B) = \lambda(\cdot \cap B)/\lambda(B)$. Þá gildir færslutengingarójafnan

$$\begin{aligned} \|\mathbf{P}(U_B X \in \cdot) - \mathbf{P}(U_B Y \in \cdot)\| \\ \leq 2\mathbf{E}[1 - \lambda(\Gamma B|B); C] + 2\mathbf{P}(C^c). \end{aligned}$$

Til þess að þessi ójafna leiði til markgildissetningar þarf að vera til safn mengja $B_t \in \mathcal{G}$, $0 < t < \infty$, sem hafa jákvætt og endanlegt Haar-mál og uppfylla fyrir öll $\gamma \in G$

$$\lambda(\gamma B_t|B_t) \rightarrow 1, \quad t \rightarrow \infty.$$

Ef við setjum B_t inn fyrir B í færslutengingarójöfnuna fæst, þegar færslutengingin er heppnuð, að

$$\|\mathbf{P}(U_{B_t} X \in \cdot) - \mathbf{P}(U_{B_t} Y \in \cdot)\| \rightarrow 1, \quad t \rightarrow \infty.$$

Svona safn mengja kallast Følner-safn og grúpa sem á sér Følner-safn kallast "amenable" á ensku og þá kannski meðfærileg á íslensku.

Óbreytilega σ -algebran er nú skilgreind svona:

$$\mathcal{I} = \{A \in \mathcal{H} : \gamma A = A \text{ fyrir öll } \gamma \in G\}.$$

Hér er meginjafngildissetningin fyrir færslutengingu.

Setning 7. *Eftirfarandi staðhæfingar eru jafngildar:*

(a) *Til er heppnuð færslutenging á X og Y .*

(c) $\mathbf{P}(X \in A) = \mathbf{P}(Y \in A)$ fyrir $A \in \mathcal{I}$.

Ef G á sér Følner-safn B_t , $0 < t < \infty$, eru (a) og (c) líka jafngildar

(b) $\|\mathbf{P}(U_{B_t} X \in \cdot) - \mathbf{P}(U_{B_t} Y \in \cdot)\| \rightarrow 1$ þegar $t \rightarrow \infty$.

Þessa setningu má útvíkka yfir í hálfgrúpur, en við látum hér staðar numið. Frekari upplýsingar um tengiaðferðina er að finna í þeim tveim bókum sem um hana hafa verið skrifaðar, [5] og [4]. (Sýnishorn úr [4] eru á www.hi.is/~hermann og á Amazon.)

Summary: Coupling means the joint construction of two or more random variables or processes, or any random things. This is a general method relevant in all fields of probabilistic inquiry; however the main thrust is towards characterizations, approximations, asymptotics, and simulation. Here we first present several basic examples of coupling, and then outline a general coupling theory for stochastic processes starting with Markov chains and ending with topological transformation groups.

Heimildir

- [1] Barbour, A., Holst, L., og Janson, S., *Poisson Approximation*, Oxford University Press, 1992.
- [2] Doeblin, W., Exposé de la théorie des chaînes simple constantes de Markov à un nombre fini d'états, *Rev. Math. Union Interbalkan*, **2**, 77-105 (1938).
- [3] Dudley, R.M., Distances of probability measures and random variables, *Ann. Math. Statist.*, **39**, 1563-1572 (1968).
- [4] Hermann Þórisson, *Coupling, Stationarity, and Regeneration*, Springer, 2000.
- [5] Lindvall, T., *Lectures on the Coupling Method*, Wiley, 1992 og Dover 2002.
- [6] Skorohod, A.V., Limit theorems for stochastic processes, *Theo. Probab. Appl.*, **1**, 261-290 (1956).
- [7] Strassen, V., The existence of probability measures with given marginals, *Ann. Math. Statist.*, **36**, 423-439 (1965).

Um höfundinn: Hermann er fæddur á Seyðisfirði árið 1952. Hann lauk stúdentsprófi frá Menntaskólanum í Reykjavík árið 1972, fl. kand. prófi í stærðfræði frá Gautaborgarháskóla árið 1975 og doktorsprófi þaðan árið 1981. Hann stundaði kennslu og rannsóknir við Gautaborgarháskóla, Chalmers verkfræðiháskólann og Stanfordháskóla þar til hann hóf rannsóknastörf við Raunvísindastofnun Háskólans árið 1989. Auk ofangreindrar bókar hefur hann skrifað á fjórða tug greina í alþjóðleg rannsóknatímarit.

Raunvísindastofnun Háskólans
Dunhaga 3
IS-107 Reykjavík
hermann@hi.is

Móttékin: 31. október 2002