Tímarit um raunvísindi og stærðfræði
1. árg. 2. hefti 2003 – raust.is/2003/2/02

Punktar, línur, slembival og reiknirit

Magnús Már Halldórsson

Háskóla Íslands

Vefútgáfa: 25. nóvember 2003

Ágrip Markmið þessarar greinar er að kynna nokkra þætti úr nútíma netafræði. Fjallað er um verkefni í netafræði og spurningar sem koma upp, rætt um aðferðir við greiningu og um reiknirit. Sérstök áhersla er lögð á slembnar aðferðir og reiknirit. Tekið er fyrir ákveðið verkefni er nefnist *þakningalitun* (e. domatic partition), og kynntar nokkrar nýlegar niðurstöður höfundar og samstarfsmanna hans.

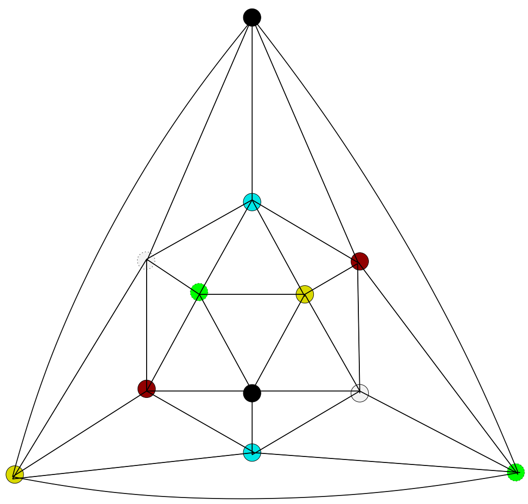
1. Net

Net eru stærðfræðimynstur sem má hugsa sér myndrænt sem línur dregnar milli fastra punkta. Líkt og í fiskinetum nefnast punktarnir *hnútar*, en línurnar milli punktanna nefnast *leggir* (eða *stikur*). Hin stærðfræðilega skilgreining á neti G er par af tveimur mengjum (V, E), þar sem V er strjált mengi hnúta og E er mengi af pörum af hnútum úr V. Því ber að hafa í huga þegar hin myndræna framsetning af neti sem punktar og línur er skoðuð að atriði eins og lögun og lengd línanna skipta ekki máli heldur eingöngu milli hvaða punktapara línurnar liggja.

Hér munum við eingöngu skoða endanleg net. Þá er hentugt að númera hnútana og líta á V sem mengið $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$, og láta n því tákna fjölda hnúta í netinu. Við gerum einnig ráð fyrir að netin séu *einföld*, þannig að í mesta lagi sé eitt eintak af hverjum legg uv milli hnútanna u og v, og að u og v séu ávallt mismunandi hnútar.

Net birtast á mörgum fjarskyldum sviðum, bæði hlutrænt (tölvunet, vegakerfi, rafrásir) og óhlutrænt (samskiptanet, vensl, árekstrar í tímatöflum).

Við segjum að hnútar u og v séu *grannar* ef leggur tengir þá. *Grennd* hnútsins u, táknuð $N(u)$, er mengi allra grannhnúta u, og *gráða* u, táknuð $d(u)$, er fjöldi granna u, eða stærð grenndarinnar. Lágmarksgráða hnúts í neti G er táknað með $\delta(G)$ en hámarksgráða með $\Delta(G)$.



Mynd 1. Net tvítugflötungs

Þakning. Mengi S af hnútum kallast *þakmengi* (e. dominating set) eða *þakning* ef allir hnútar eru annað hvort í S eða hafa granna í S.

Þakningar má hagnýta á fjölda vegu. Sérstaklega á það við staðsetningu mannvirkja, t.a.m. slökkvistöðva, þar sem gert er að kröfu að allir sem að málinu komi búi nægilega nálægt einu af mannvirkjunum. Slíkar ákvarðanir mynda heila fræðigrein, staðsetningafræði (e. *location theory*), sem er blanda af aðgerðagreiningu og ákvarðanafræði. Sem netafræðiverkefni hefur það einnig verið rannsakað sérlega mikið, og út hefur komið tveggja binda uppflettirit um alla hluti sem tengjast þakningum [5, 4].

Skemmtileg dæmi er að finna á vefsetrinu MegaMath [6] sem kynnir ýmsar stærðfræðilegar hugmyndir fyrir ungum börnum. Þar er gatnakerfi bæjarins netið, og mannvirkin sem þarf að setja upp eru ísbúðir fyrir alla borgara, með því skilyrði að enginn þurfi að labba lengra en í næstu götu til að kaupa sér ís.

Ef við lítum á netið í mynd 1 þá sjáum við að svörtu hnútarnir tveir mynda þakningu. Reyndar má finna í því neti margar þakningar af sömu stærð.

Þakningalitun. Í því verkefni sem við ætlum að skoða í þessari grein viljum við finna eins margar þakningar í netinu og hægt er sem skarast ekki. Í ísbúðadæminu væri eðlilegt að reyna að staðsetja aðrar nauðsynlegar verslunartegundir í bænum undir sömu skilyrðum, t.a.m. dótabúð, nammibúð, myndbandaleigu o.s.frv. Hver tegund þarf því að þekja netið, og þar sem eðlilegt væri að miða við að hver staðsetning rúmi aðeins eina verslun, ættu þakningarnar ekki að skarast.

Við getum skilgreint þetta svo að við viljum lita hnútana í G þannig að hnútar hvers lits myndi þakningu. Markmiðið með *þakningalitun* er að hámarka fjölda slíkra þakninga. Látum $D(G)$ tákna mesta fjölda sundurlægra slíkra þakninga fyrir net G. Ef við lítum á netið í mynd 1, þá er hnútarnir misgráir og við getum séð að hnútar af hverjum grástyrkleika mynda þakningu. Því gildir hér að $D(G) \geq 6$.

Nokkrir eiginleikar þakningalitana. Til að átta sig betur á verkefninu er gott að kynna sér eiginleika þakninga.

Ef hnútum er bætt við þakningu þá höfum við áfram þakningu, þ.e. viðbótarhnútar auðvelda aðeins það verk að þekja netið og að tryggja að allir hafi granna í hópnum. Það þýðir líka að ef hnútar hafa ekki verið litaðir í þakningalitum, þá er óhætt að lita þá með hvaða lit sem er – þakningunum sem fyrir eru fækkar ekki. Því má einnig skilgreina þakningalitun sem skiptingu á hnútamenginu V í sem flestar þakningar.

Við sjáum að $D(G) \geq 1$, því heildarhnútamengið V er alltaf þakning. Það er einnig rakið að $D(G) \leq n$, því hver þakning verður að innihalda að lágmarki einn hnút. Ef til eru hnútar sem hafa engan granna, þá er $D(G) = 1$. Í öllum öðrum tilfellum má skipta netinu í að minnsta tvo hluta þannig að hvor hluti sé þakning, og bjóðum við lesandanum að finna slíka aðferð.

Hægt er að finna einföld efri mörk á $D(G)$ með því að skoða grennd hvers hnúts. Skoðum til dæmis hnútinn u neðst í vinstra horninu á mynd 1. Þessi hnútur hefur fimm granna. Hver þeirra gæti verið í mismunandi þakningum, og einnig hann sjálfur. En ef til væri sjöundi liturinn, þá væri u ekki þakinn fyrst hvorki u né grannar hans hafa þann lit. Af því sjáum við að $D(G) \leq d(u) + 1$. Þar sem þetta gildir um hvaða hnút sem er í G, þá leiðir af því að

$$D(G) \leq \delta(G) + 1. \quad (1)$$

Hverjar eru spurningarnar? Við höfum nú afmarkað þakningalitun sem viðfangsefni, en þá er eftir að ákveða hvað við viljum gera með það. Eins og oft er það kannski mikilvægast að spyrja réttu spurninganna.

Klassísk netafræði spyr um eiginleika og mynstur neta. Varðandi stika eins og $D(G)$, er áhugavert að spyrja hvaða gildi hann geti tekið og hver vensl hans við aðra stika eru. Við höfum séð að lágmarksgráðan $\delta(G)$ tengist $D(G)$ og einnig rökrétt er að athuga n, fjölda hnúta í netinu.

> **Spurning 1:** Hvaða gildi tekur $D(G)$ sem fall af δ og n?

Með hagnýtingu netafræðinnar í ýmsum vísindum og upplýsingavinnslu jókst áhugi á því að leita að hraðvirkum reikniritum til að leysa netafræðiverkefni. Slík viðfangsefni má kalla *reiknilega netafræði*. Hér er lykilverkefnið að finna hraðvirka aðferð til að reikna $D(G)$ fyrir öll net, og þá einnig til að finna samsvarandi þakningalitun.

> **Spurning 2:** Er til hraðvirk aðferð til að finna bestu þakningalitun?

Því miður hefur ekki fundist jákvætt svar við spurningu 2. Það sem er vitað er að fjölmörg mikilvæg bestunarverkefni eru jafnerfið að þessu leyti: annað hvort eru til hraðvirkar aðferðir fyrir þau öll, eða ekki neitt þeirra. Slík verkefni kallast *NP-fullkomin*, og telja má nú nokkuð víst að engar slíkar aðferðir fyrirfinnist. Allar þekktar aðferðir taka svo mikinn tíma (í versta falli) að þær ráða eingöngu við lítil net með nokkrum tugum hnúta. Sú spurning hvort til séu hraðvirkar aðferðir fyrir NP-fullkomin verkefni, eða hvort “P = NP”, er hins vegar ein þekktasta og erfiðasta óleysta stærðfræðigáta sem þekkist. M. a. er hún ein af sjö verkefnum sem Clay stærðfræðistofnunin í Cambridge, Massachusetts hefur heitið milljón dala verðlaunum fyrir lausn á [2].

Í stað spurningar 2 má reyna að takmarka spurninguna við hópa áhugaverðra neta sem hafa eitthvert mynstur sem gerir lausn verkefnisins mögulegri.

> **Spurning 3:** Fyrir hvaða flokka neta eru til hraðvirkar aðferðir til að finna bestu þakningalitun?

Til er fjöldi vel skilgreindra og hagnýtra netaflokka og því getur endanleg ákvörðun verið all mikið verk. Ekki verður farið nánar út í það hér.

Önnur leið er sem hefur verið farin á síðari árum er sú að gefa upp á bátinn kröfuna um að finna bestu mögulegu þakningalitun eða nákvæmt gildi á $D(G)$, heldur sætta sig við að finna einhverja *góða* lausn. Það er alltaf spurning hvað gott megi teljast, en við miðum hér við að lausnirnar séu aldrei of langt frá besta gildi.

> **Spurning 4:** Er til hraðvirk aðferð sem finnur þakningalitun með $D(G)/f(n)$ þakningum, þar sem $f(n)$ er fasti eða hægt vaxandi fall af n?

Hér á eftir munum við leitast við að svara þessum spurningum eins vel og hægt er í dag. Á leiðinni munum við kynnast notkun líkindafræðilegra aðferða við lausn netafræðilegra verkefna. Þær niðurstöður sem verða kynntar eru byggðar á greininni [3], nema annað sé tekið fram.

2. Slembin litun

Við skoðum nú einfalda slembna aðferð við þakningalitun, *handahófslitun*.

> Fastsetjum ákveðinn fjölda lita t.
> Veljum fyrir hvern hnút einn af litunum t, óháð hinum hnútunum.

Sér í lagi skoðum við tilvikið þegar $t = \lfloor(\delta + 1)/3 \ln n\rfloor$.

Við höfum áhuga á að meta líkurnar á því að þessi handahófslitun skili gildri litun. Við þurfum ekki nákvæmt gildi á því, heldur viljum sýna fram á góð neðri mörk. Ef litun er ógild þá er það vegna þess að einhver hnútur er ekki þakinn af einhverjum lit. Við byrjum því á að meta líkindi þess að hnútur v sé ekki þakinn af lit ℓ. Það gerist ef enginn af grönnum v (né v sjálfur) hefur fengið litinn ℓ. Látum atburðinn $A_{v,\ell}$ tákna að hnútur v sé ekki þakinn af litnum ℓ. Þessir atburðir eru háðir litum allra hnúta í grennd v og því ekki auðvelt að reikna líkindi þeirra beint. Þess í stað má brjóta þessa atburði upp í minni einingar.

Rifjum fyrst upp nokkur grunnatriði líkindareiknings. *Margfeldisreglan* segir að ef $A_1, A_2, \ldots, A_t$ eru *óháðir* atburðir eru líkindi þess að þeir gerist *allir* fengin með

$$\Pr[\cap_{i=1}^t A_i] = \prod_{i=1}^t \Pr[A_i]. \tag{2}$$

Samlagningarreglan segir að hvort sem atburðirnir eru háðir eða ekki þá eru líkindin á að einhver þeirra gerist í mesta lagi summa líkinda atburðanna, eða

$$\Pr[\cup_{i=1}^t A_i] \leq \sum_{i=1}^t \Pr[A_i]. \tag{3}$$

Við skulum nú meta líkindin á $A_{v,\ell}$.

Hjálparsetning 1. *Látum v vera hnút og ℓ vera einn af $t = (\delta + 1)/3 \ln n$ litum. Líkindin á atburðinum $A_{v,\ell}$ eru í mesta lagi $1/n^3$.*

Sönnun. Látum $B_{u,\ell,}$ vera atburðinn að hnúturinn u fái litinn ℓ. Þar sem hver hnútur, þar með talinn u, fær hvern af litunum t með sömu líkindum, þá gildir að

$$\Pr[B_{u,\ell}] = 1/t.$$

Það að hnútur v sé ekki þakinn af lit ℓ er jafngilt því að bæði v og allir grannar hans hafi fengið aðra liti en ℓ, þ.e.a.s.

$$A_{v,\ell} = \bigcap_{u \in N[v]} \overline{B_{u,\ell}}.$$

Litir hinna mismunandi hnúta eru óháðir og því gildir margfeldisreglan

$$\begin{aligned}\Pr[A_{v,\ell}] &= \prod_{u \in N[v]} \Pr[\overline{B_{u,\ell}}] \\ &= \prod_{u \in N[v]} (1 - \Pr[B_{u,\ell}]) = (1 - 1/t)^{d(v)+1}.\end{aligned}$$

Þetta gildi er óþjált, en það kemur okkur til hjálpar að við krefjumst ekki nákvæmra gilda. Við nýtum okkur fyrstu tvo liði í Maclaurin röð fyrir e^x sem gefur að $1 + x \leq e^x$ fyrir allar rauntölur x. Nú höfum við að

$$\Pr[A_{v,\ell}] \leq e^{-1/t\cdot(d(v)+1)}$$
$$= e^{-3\ln n\cdot(d(v)+1)/(\delta+1)} \leq e^{-3\ln n} = 1/n^3.$$

$\square$

Við sýnum nú fram á há líkindi á að litunin í heild sé gild.

Hjálparsetning 2. *Líkindin á að handahófslitun með $(\delta+1)/3\ln n$ litum sé gild er í það minnsta $1 - 1/n$.*

Sönnun. Til að litunin sé ógild þarf einhver af atburðunum $A_{v,\ell}$ að gerast, þar sem v er einhver af n hnútum í G og ℓ er einhver af $t < n$ litum. Samkvæmt samlagningarreglunni höfum við að

$$\Pr[\text{Litunin er ógild}] = \Pr[\cup_{v\in V,1\leq\ell\leq t}A_{v,\ell}]$$
$$\leq n \cdot t \cdot \frac{1}{n^3} < \frac{1}{n}.$$

$\square$

Að lokum getum við þá notað þetta til að segja eitthvað sem gildir *alltaf*, ekki bara oft. Ef líkindi á að atburður gerist er stærri en núll, þá *gerist* atburðurinn undir einhverjum kringumstæðum. Í þessu tilfelli þýðir það að til sé gilt val á litum fyrir hnútana.

Setning 1. $D(G) \geq (\delta+1)/3\ln n$

Það var hinn afkastamikli Paul Erdös sem uppgötvaði hvernig nota mætti líkindi í netafræði og fléttufræði.

Samanburður við önnur mörk. Þegar Setning 1 er borin saman við hið algilda efri mark $\delta + 1$, þá munar sem sagt þætti sem er logri af n. Áður en [3] var rituð var fátt vitað almennt um þakningalitanir almennra neta, og einu mörkin sem gefin eru upp í uppflettiritinu áðurnefnda um þakningar [5] voru þau að $D(G) \geq \lceil n/(n - \delta(G))\rceil$ [7].

Þessi mörk eru all nærri því besta sem segja má. Ekki nóg með að til séu net sem hafi þakningatölu mjög nærri þessum mörkum, heldur gildir það um *nær öll* net! Nánar tiltekið, fyrir öll $\epsilon > 0$ og nær öll net G með n hnútum gildir að stærð minnstu þakningar er í það minnsta

$$D(G) \geq \frac{n}{\delta(G)+1} \cdot (1-\epsilon)\ln n.$$

Því hafa langflest net þakningalitunartölu stærri in $(1+\epsilon)(\delta+1)/\ln n$, fyrir hvaða $\epsilon > 0$ sem er.

Skilgreinum fallið $D(\delta, n)$ sem minnstu þakningatölu nets af lágmarksgráðu δ með n hnúta. Við höfum með ofantöldum niðurstöðum og setningu 1 fengið að $D(\delta,n)/\ln n$ sé stærð með gildi á bilinu $[1, 3]$. Æskilegt væri að leiða út nákvæma formúlu fyrir $D(\delta, n)$, eða í það minnsta að finna markgildi fyrir hlutfallið $D(\delta,n)/[(\delta+1)/\ln n]$.

2.1. Endurbætt lausn

Við getum bætt fastann í Setningu 1 í því sem næst 1. Til þess hættum við að ætlast til að allir litirnir myndi gildar þakningar, en reynum að tryggja að nægilega margir af litunum geri það. Hnútar sem litast með ógildum litum, verða þá endurlitaðir með einum af gildu litunum. Við rifjum fyrst upp mjög hentugan eiginleika væntigilda, að þau dreifast yfir summur.

Hjálparsetning 3. *Ef líkindi á atburðum $A_1, \ldots, A_m$ eru (í mesta lagi) p, þá er væntifjöldi atburða sem gerast (í mesta lagi) $m \cdot p$. Þetta gildir hvort sem atburðirnir eru óháðir eða ekki.*

Setning 2.

$$D(G) \geq \frac{\delta+1}{\ln n} \cdot \left(1 - \frac{\ln\ln n + 1}{\ln(n\ln n)}\right).$$

Sönnun. Látum $t = (\delta+1)/\ln(n\ln n)$. Við höfum fyrir hvern af þessum $n \cdot t$ atburðum $A_{v,\ell}$ að

$$\Pr[A_{v,\ell}] = (1 - 1/\ell)^{d(v)+1}$$
$$\leq e^{-(d(v)+1)/t} \leq 1/(n\ln n).$$

Því er væntifjöldi atburða sem eiga sér stað í mesta lagi $t/\ln n$. Væntifjöldri ógildra lita, lita sem ekki mynda þakningu, er því einnig í mesta lagi $t/\ln n$. Hnútar sem hafa ógilda liti má alla endurlita með einhverjum gildum lit án þess að fækka fjölda gildra lita. Væntifjöldi *gildra* lita er því í það minnsta

$$t - \frac{t}{\ln n} = \frac{\delta+1}{\ln n}\left(1 - \frac{\ln\ln n + 1}{\ln(n\ln n)}\right).$$

Til hlýtur að vera gild litun með fjölda lita jafnan eða meiri en væntifjölda lita. $\square$

Við höfum nú sýnt fram á með setningu 2 og athugasemd um slembinet að

$$\lim_{n\to\infty} \frac{D(\delta, n)}{(\delta+1)/\ln n} = 1.$$

Þar með er þessari spurningu að vissu leyti fullsvarað. Nú má næst spyrja um hvað við getum sagt ef hámarksgráða netsins er lítil.

2.2. Net af lágri gráðu

Í sönnunum að ofan sýndum við í raun fram á að nær allar litanir hafa þá eiginleika sem við leitum að. Þó væri nóg fyrir okkur að sýna fram á að *til sé* í það minnsta ein litun með rétta eiginleika. Þegar atburðir eru óháðir er auðvelt að sýna fram á hið síðara, þó hið fyrra gildi ekki; t.a.m. ef t óháðir atburðir hafa allir líkindi p, þá eru jákvæð líkindi p^t á að þeir gerist allir.

Í okkar dæmi eru atburðirnir vissulega ekki óháðir, en hins vegar er hver atburður háður tiltölulega fáum öðrum atburðum. Atburðurinn $A_{v,\ell}$ er háður $A_{w,\ell'}$ ef $N[v] \cap N[w] \neq \emptyset$, en annars ekki. Því gildir að $A_{v,\ell}$ er óháður öllum nema

$$t(1 + d(v) + (d(v) - 1)\Delta) \leq \Delta^3 - 1$$

atburðum.

Til er setning LLL kennd við ungverjann Lázló Lovász (sjá [1]) sem tekur fyrir tilfelli þegar fá pör af atburðum eru háð.

Setning 3. *(LLL) Gefnir eru atburðir $A_1, A_2, \ldots$, og heiltala d, þannig að hver atburður A_i er óháður öllum nema d atburðum og $e(d+1)\Pr[A_i] \leq 1$, þar sem e er grunntala náttúrlegs logra. Þá gildir að $\Pr[\cap_i \overline{A_i}] > 0$.*

Við getum þá leitt út eftirfarandi niðurstöðu.

Setning 4. *$D(G) \geq (\delta + 1)/c \ln \Delta$, fyrir einhvern fasta c.*

Sönnun. Veljum $t = \lfloor (\delta+1)/(3 \cdot \ln(3^{1/3} \cdot \Delta)) \rfloor$ og litum netið af handahófi með þessum t litum eins og áður. Þá gildir að $\Pr[A_{v,\ell}] \leq (1 - 1/t)^{d(v)+1} \leq 1/(3 \cdot \Delta^3)$. Því gildir að $(d+1)\Pr[A_{v,\ell}] \leq 1/3$, og skilyrði LLL er uppfyllt. Þá höfum við að það eru jákvæð líkindi á að enginn atburðanna $A_{v,\ell}$ gerist, þ.e. það eru jákvæð líkindi á að litunin sé gild þakningalitun.

Fyrir regluleg net (net þar sem allir hnútar hafa sömu gráðu) með lága gráðu er munurinn mikill á þessum neðri mörkum og þeim fyrri.

Í [3] er gengið skrefi lengra í að ná sem nákvæmustu neðri mörkum fyrir $D(G)$. Notuð er útgáfa af LLL sem virkar í tveimur skrefum, þar sem hnútarnir eru fyrst flokkaðir í hópa og síðan hver hópur litaður út af fyrir sig. Út frá því fæst eftirfarandi.

Setning 5. *Til eru fastar $a, \Delta_0 > 0$ þannig að fyrir hvert net G með hámarksgráðu $\Delta \geq \Delta_0$, þá gildir að*

$$D(G) \geq \left\lfloor \frac{\delta}{\ln \Delta + a \ln(\ln \Delta)} \right\rfloor.$$

Við höfum þá þétt mörk á $D(G)$ sem fall af lágmarks- og hámarksgráðu, δ og Δ. Endurskilgreinum nú $D(\delta, \Delta)$ sem minnstu þakningatölu nets með lágmarksgráðu δ og hámarksgráðu Δ. Þá höfum við að

$$\lim_{\Delta\to\infty} \frac{D(\delta, \Delta)}{(\delta+1)/\ln \Delta} = 1.$$

2.3. Reiknirit

Aðferðirnar í setningum 1 og 2 má líta á sem einföld slembin reiknirit. Hægt er að umbreyta þeim í löggeng (deterministic) reiknirit með því að nota svokallaða *aðferð skilyrtra líkinda* [1]. Slíkt leiðir af sér skilvirkar gráðugar aðferðir. Það er þó áhugavert að fyrir þakningalitun hefði verið erfitt að leiða út þessar gráðugu aðferðir beint án þess að fara í gegnum líkindafræðina.

Hægt er að leiða út löggengt reiknirit fyrir aðferðina sem byggð er á LLL, en það leiðir þó til litunar þar sem fastinn c er mun verri. Ekki er vitað hvort hægt sé að finna á hagkvæman hátt litun samkvæmt setningu 5.

Summary: The purpose of this article is to present some themes in modern graph theory to non-specialists. We discuss the problems, questions that arise, methods of analysis, and algorithms, with a special focus on probabilistic methods. The discussion is in the context of a specific problem, the *domatic number* of a graph, and some recent results of the author and collaborators are described.

Heimildir

[1] N. Alon and J. Spencer. *The Probabilistic Method*. Wiley, 1992.

[2] Clay Mathematics Institute. Millenium Prize Problems. Sjá http://www.claymath.org/Millennium_Prize_Problems/.

[3] U. Feige, M. M. Halldórsson, G. Kortsarz, and A. Srinivasan. Approximating the domatic number. *SIAM Journal of Computing* **32**(1), 172–195, desember 2002.

[4] T. W. Haynes, S. T. Hedetniemi, and P. J. Slater. *Domination in Graphs: Advanced Topics*. Marcel Dekker, 1998.

[5] T. W. Haynes, S. T. Hedetniemi, and P. J. Slater. *Fundamentals of Domination in Graphs*. Marcel Dekker, 1998.

[6] MegaMath. Algorithms and Icecream for all. http://www.c3.lanl.gov/mega-math/workbk/dom/doice.html.

[7] B. Zelinka. Domatic number and degree of vertices of a graph. *Math. Slovaca*, 33:145–147, 1983.

Um höfundinn: Magnús Már Halldórsson er fæddur 1963 í Reykjavík. Hann lauk stúdentsprófi við Menntaskólann í Hamrahlíð 1982, BS-prófum í stærðfræði og tölvunarfræði frá Oregon-háskóla 1985, og doktorsprófi í tölvunarfræði frá Rutgers-háskóla árið 1991 undir leiðsögn prófessors Ravi Boppana. Hann starfaði við tækniháskóla Tokyo 1991–1992, háskólann Japan Advanced Institute of Science and Technology - Hokuriku 1992–1995, Raunvísindastofnun Háskólans 1995–2000, og Urð Verðandi Skuld 2001–. Einnig var hann aðjúnkt prófessor við Björgvinarháskóla 1997–2000. Hann hefur starfað frá desember 2001 sem prófessor við tölvunarfræðiskor Háskóla Íslands.

Raunvísindastofnun Háskólans
Dunhaga 3
IS-107 Reykjavík
mmh@hi.is

Móttekin: 30. október 2002