

Umraðanagrúpur, granngrúpur og net

Rögnvaldur G. Möller

Raunvísindastofnun Háskólans

Vefútgáfa: 23. október 2003

Ágrip – Á umraðanagrúpu sem verkar á mengi Ω má skilgreina grannmynstur. Eiginleikar grannmynstursins endurspeglast í eiginleikum grúpuverkunarinnar og öfugt. Rætt er um þessi tengsl og sýnd dæmi um það hvernig má nýta tengslin til að sanna setningar um grúpuverkanir og um granngrúpur.

1. Inngangur

Efni þessa pistils er tengsl umraðanagrúpa við granngrúpur. Oft er reynt að skipta stærðfræði upp í ólíka hluta og setja þá upp sem andstæður: hagnýt stærðfræði og hrein stærðfræði, stærðfræðigreining og algebra, og hátimbraðir fræðilegir loftkastalar og jarðbundin sértæk dæmi. Ein slík skipting er strjál stærðfræði á móti samfelldri stærðfræði. Algebra, fléttufræði og netafræði falla undir strjálu stærðfræðina og stærðfræðigreining, rúmfræði og grannfræði falla undir samfelldu stærðfræðina. En það er svo skemmtilegt við stærðfræði að jafnvel ólíkustu undirgreinar hennar geta átt það til að fléttast saman og oft fást fallegustu og dýpstu niðurstöðurnar þannig. Umraðanagrúpufræðin heyrir undir algebru en einnig hafa þau mikil tengsl við fléttufræði og netafræði og þegar fjallað er um óendanlegar umraðanagrúpur þá eru tengslin við rökfræði djúpstæð. Umraðanagrúpufræðin flokkast því sem strjál stærðfræði. En á sérhverja umraðanagrúpu má skilgreina grannmynstur og þannig fæst brú yfir gjána sem aðskilur strjála og samfellda stærðfræði. Yfir þessa brú er hægt að flytja hugtök, aðferðir og niðurstöður úr grannfræði og stærðfræðigreiningu og nýta til að sanna setningar um umraðanagrúpur, en það er líka hægt að fara með verkfærakassann úr umraðanagrúpufræðunum yfir brúna og nýta dót úr honum við athuganir á granngrúpum.

Í þessum pistli verða fyrst kynntar til leiks aðalpersónurnar: umraðanagrúpur, granngrúpur og net. Nauðsyn er að nota fjölmörg hugtök úr grannfræði. Flest eru skilgreind stuttlega í textanum þegar þeirra

er þörf en meiri fróðleik má finna í [13]. Í grein 2.2 er sýnt hvernig hægt er að skilgreina grannmynstur á umraðanagrúpu. Nánar má lesa um þetta grannmynstur í [2], [15], [16], [19] og [23], en skilgreiningin er mun eldri (fyrstu vísanir sem ég veit um eru [9] og [7]). Sérstaklega er gaman af [16] þar sem sönnuð er setning um umraðanagrúpur en í sönnuninni koma fyrir heildi og lokahnykkurinn er að vísa til niðurstöðu um rúmfræði í Hilbert-rúmum. Í næsta hluta er fjallað um tengsl grannmynstursins og grannfræðilegra eiginleika við eiginleika grúpunnar sem umraðanagrúpu. Einkum er skoðað hvernig grannfræðilega hugtakið „þjappað“ tengist verkun grúpunnar. Þar á eftir er lýst nokkrum niðurstöðum þar sem þessi tengsl eru nýtt. Í þessum hluta er frásögnin hraðari og ekki sýndar sannanir heldur eingöngu leitast við að lýsa niðurstöðunum og gefa hugmynd um á hverju sönnun byggist.

2. Grunnhugtök

2.1. Grúpuverkanir

Skilgreining 1. Verkun grúpu G á mengi Ω er vörpun $G \times \Omega \rightarrow \Omega$, ritað $(g, \alpha) \mapsto g(\alpha)$, sem uppfyllir eftirfarandi tvö skilyrði:

- (i) ef $g, h \in G$ og $\alpha \in \Omega$ þá er $(gh)(\alpha) = g(h(\alpha))$;
- (ii) ef e táknar einingarstakið í G þá er $e(\alpha) = \alpha$ fyrir öll $\alpha \in \Omega$.

Af þessu leiðir að vörpunin $\Omega \rightarrow \Omega; \alpha \mapsto g(\alpha)$ er gagntæk ef g er stak í grúpu G sem verkar á mengið Ω . Einnig sjáum við að margföldun í grúpunni samsvarar samskeytingu varpana.

Grúpuverkanir eru aðferð stærðfræðinnar til að lýsa samhverfum. Þannig fléttast grúpufræðin inn í aðrar greinar stærðfræði og er einnig gagnleg í mörgum raunvísinda- og tæknigreinum. Upphaflega varð grúpufræði til vegna athugana á grúpuverkunum í sambandi við rætur margliða og kristallaðist í verkum Galois. Síðar þróaðist grúpuhugtakið sjálfst óháð tiltekinni grúpuverkun og grúpufræðin er löngu orðin ein af höfuðgreinum algebrunnar.

Skilgreining 2. Látum Ω vera mengi. Mengi allra gagnstækra varpana $\Omega \rightarrow \Omega$ er táknað með $\text{Sym}(\Omega)$. Með samskeytingu varpana verður $\text{Sym}(\Omega)$ á eðlilegan hátt að grúpu sem við köllum *samhverfugrúpu* Ω .

Ef grúpa G verkar á mengi Ω og um öll stök $g \in G$, nema einingarstakið e , gildir að til er punktur $\alpha \in \Omega$ þannig að $g(\alpha) \neq \alpha$ þá er sagt að verkunin sé *trúföst*. (Það er að segja, verkunin er trúföst ef einingarstakið er eina stakið í G sem gerir nákvæmlega ekkert við Ω .) Verkun G á mengi Ω skilgreinir á eðlilegan hátt grúpumótun frá G til $\text{Sym}(\Omega)$ þannig að $g \in G$ varpast yfir í umröðunina á Ω sem samsvarar verkun g á Ω . Þegar verkunin er trúföst, þá er þessi mótun eintæk og líta má á G sem hlutgrúpu í $\text{Sym}(\Omega)$.

Skilgreining 3. Hlutgrúpa í $\text{Sym}(\Omega)$ kallast *umraðanagruppa* á Ω .

Skilgreining 4. Látum G vera grúpu sem verkar á mengi Ω .

(a) Braut punkts $\alpha \in \Omega$ við verkun staks $g \in G$ er skilgreind sem mengið $\{g^i(\alpha) \mid i \in \mathbb{Z}\}$.

(b) Braut punkts $\alpha \in \Omega$ við verkun grúpunnar G er skilgreind sem mengið $\{g(\alpha) \mid g \in G\}$.

Brautir grúpunnar G gefa okkur skiptingu á Ω í sundurlæg mengi. Þegar grúpuverkanir eru athugaðar er oft hægt að skoða sérstaklega hvað grúpan gerir á hverri braut fyrir sig og þannig er hægt að einblína á það tilvik þegar grúpan hefur bara eina braut.

Skilgreining 5. Grúpa G sem verkar á mengi Ω er sögð *gegnvirk* ef fyrir sérhverja tvo punkta $\alpha, \beta \in \Omega$ er til stak $g \in G$ þannig að $g(\alpha) = \beta$, þ.e.a.s. ef hún hefur bara eina braut.

Það að grúpuverkun sé gegnvirk segir einmitt að frá sjónarhóli grúpunnar líti allir punktar í Ω eins út.

Þegar verið er að fást við samhverfur stærðfræðilegra kerfa þá fæst gegnvirk grúpuverkun ef allir punktarnir í kerfinu eru „eins“, en það er oft eðlilegt skilyrði.

Skilgreining 6. Látum grúpu G verka á mengi Ω . Fyrir stak $\alpha \in \Omega$ skilgreinum við *kyrragrúpu* α sem grúpuna

$$G_\alpha = \{g \in G \mid g(\alpha) = \alpha\}.$$

Fyrir $\Phi \subseteq \Omega$ skilgreinum við

$$G_\Phi = \{g \in G \mid g(\alpha) = \alpha \text{ fyrir öll } \alpha \in \Phi\}.$$

Setning 7. Látum grúpu G verka á mengi Ω . Fyrir stak $g \in G$ og punkt $\alpha \in \Omega$ gildir að

$$gG_\alpha g^{-1} = G_{g(\alpha)}.$$

Sönnun: Gerum ráð fyrir að $h \in G_\alpha$ og $g \in G$. Þá er

$$(ghg^{-1})(g(\alpha)) = (gh)(\alpha) = g(h(\alpha)) = g(\alpha)$$

Því er $ghg^{-1} \in G_{g(\alpha)}$ og þar með $gG_\alpha g^{-1} \subseteq G_{g(\alpha)}$. Öfugt gildir að ef $h \in G_{g(\alpha)}$ þá er $h' = g^{-1}hg \in G_{g^{-1}(g(\alpha))} = G_\alpha$. Því er $h = gh'g^{-1} \in gG_\alpha g^{-1}$. Þá er fengið að $G_{g(\alpha)} \subseteq gG_\alpha g^{-1}$.

Ef H er hlutgrúpa í G þá verkar G á G/H (mengi vinstri hjámengja H í G) þannig að $g(xH) = (gx)H$. Með þessari aðferð er hægt að búa til grúpuverkanir að vild. Raunar má lýsa öllum gegnvirkum grúpuverkunum á þennan hátt. Hugsum okkur að grúpa G verki gegnvirkt á mengi Ω . Á eðlilegan hátt má samsama Ω við G/G_α þannig að punktur $\beta \in \Omega$ sé samsamaður við hjámengið gG_α þar sem g er eitthvert stak í G þannig að $g(\alpha) = \beta$. Einfalt er að sjá að valið á stakinu g skipti ekki máli: ef h er eitthvert annað stak í G þannig að $h(\alpha) = \beta$ þá er $(h^{-1}g)(\alpha) = \alpha$ og því er $h^{-1}g \in G_\alpha$ og þar með er $hG_\alpha = gG_\alpha$. Höfum því fengið vel skilgreinda vörpun $\Psi : \Omega \rightarrow G/G_\alpha$. Auðveldlega sést að $\Psi(g(\alpha)) = g(\Psi(\alpha))$ og því má segja að verkun G á Ω sé „eins og“ verkun G á G/G_α . Það sem tapast þegar við skiptum Ω út og skoðum G/G_α í staðinn er að við gætum haft eitthvert stærðfræðimynstur skilgreint á Ω og haft áhuga á að skoða samspilið á milli mynstursins á Ω , eiginleika grúpunnar G og verkunar hennar á Ω en slíkt sést ekki þegar horft á G/G_α .

2.2. Granngrúpur

Skilgreining 8. *Granngrúpa* er grúpa G ásamt grannmynstri á G þannig að margföldun í grúpunni sé samfelld vörpun

$$G \times G \rightarrow G; (g, h) \mapsto gh$$

og það að taka andhverfu í G sé samfelld vörpun

$$G \rightarrow G; g \mapsto g^{-1}.$$

Sem dæmi um granngrúpur má taka mengi rauntalna ásamt samlagningu, jákvæðar rauntölur ásamt margföldun og andhverfanleg 2×2 -fylki ásamt margföldun. Í öllum tilvikum er grannmynstrið það venjulega.

Verkefni okkar núna er að nota verkun G á mengi Ω til að skilgreina grannmynstur á G þannig að G verði granngrúpa.

Safn $\mathcal{B}$ af hlutmengjum úr G er sagt vera *grunnur* fyrir grannmynstur á G ef

(i) fyrir sérhvert stak g í G er til stak B í $\mathcal{B}$ sem inniheldur g , og

(ii) ef stak g í G er innihaldið í sniðmengi tveggja staka B_1 og B_2 úr $\mathcal{B}$ þá er til stak B_3 í $\mathcal{B}$ þannig að $g \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.

Út frá slíku safni má skilgreina grannmynstur þannig að $U \subseteq G$ sé opið ef og aðeins ef um sérhvert stak $u \in U$ gildir að til er stak $B \in \mathcal{B}$ þannig að $u \in B \subseteq U$. *Hlutgrunnur* fyrir grannmynstur er safn hlutmengja $\mathcal{S}$ þannig að sammengi stakanna í $\mathcal{S}$ sé allt G . Safn allra sniðmengja endanlega margra mengja úr $\mathcal{S}$ er grunnur fyrir grannmynstur á G .

Til að skilgreina grannmynstur á grúpu og gera hana að granngrúpu er nóg að tiltaka grenndagrunn fyrir einingarstakið í grúpunni. (*Grenndagrunnur* fyrir stak $g \in G$ er safn hlutmengja í G þannig að öll innihaldi þau g og ef við tökum sniðmengi tveggja mengja í grenndagrunninum þá inniheldur þetta sniðmengi eitthvert hlutmengi úr safninu.) Ef $\mathcal{B}_e$ er grenndagrunnur fyrir einingarstakið þá er mengið $\{gB \mid B \in \mathcal{B}_e\}$ grenndagrunnur fyrir stakið $g \in G$ og sammengi allra þessara grenndagrunna fyrir stök G er grunnur fyrir grannmynstur á G .

Skilgreining 9. Látum G vera grúpu sem verkar á mengi Ω . Skilgreinum *umraðanagrannmynstrið* (m.t.t. verkunar G á Ω) á G með því að taka fjölskylduna

$$\mathcal{B} = \{G_{(\Phi)} \mid \Phi \text{ endanlegt hlutmengi í } \Omega\}$$

sem grenndagrunn fyrir einingarstakið.

Fyrir stak $h \in G$ og endanlegt hlutmengi $\Phi \subseteq \Omega$ skilgreinum við

$$B(\Phi, h) = \{g \in G \mid g(\alpha) = h(\alpha) \text{ fyrir öll } \alpha \in \Phi\}.$$

Safn allra slíkra hlutmengja í G þegar Φ hleypur yfir öll endanleg hlutmengi í Ω og h yfir öll stök í G er grunnur fyrir grannmynstur á G . Hlutmengi U í G er opið ef um sérhvert stak $g \in U$ gildir að til er mengi $B(\Phi, h)$ sem inniheldur g og er innihaldið í U . Takið eftir að $B(\Phi, h) = hG_{(\Phi)}$ og því er þetta bara önnur lýsing á umraðanagrannmynstrinu í Skilgreiningu 9.

Nú er auðvelt að sýna (höfundur hefur notað það sem æfingu í námskeiði um grannfræði) að margföldun í grúpunni og það að taka andhverfu staks eru samfelldar aðgerðir og því er G með þessu grannmynstri granngrúpa.

Þegar mengið Ω er teljanlegt og grúpan G er trúföst er hægt að skilgreina firð á G sem gefur sama grannmynstur og hér að ofan. Við fáum okkur upptalningu á stökunum í Ω og ritum $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots\}$. Síðan skilgreinum við fjarlægðina á milli tveggja staka g og h í G sem

$$d(g, h) = \max\{2^{-i} \mid g(\omega_i) \neq h(\omega_i) \text{ eða } g^{-1}(\omega_i) \neq h^{-1}(\omega_i)\}.$$

Ef þessi firð er notuð á $\text{Sym}(\Omega)$ fæst fullkomið firðrúm.

Hægt er að lýsa þessu grannmynstri með aðferðum sem eru oft notaðar til að setja fram grannmynstur á mengjum varpana. Hugsum okkur að Ω hafi strjála grannmynstrið (öll hlutmengi eru opin) og hugsum G sem mengi af (samfelldum) vörpunum $\Omega \rightarrow \Omega$. Hlutmengi í Ω er þjappað þá og því aðeins að það sé endanlegt. *Þjappað-opið grannmynstrið* á G er skilgreint með því að taka sem hlutgrunn fyrir grannmynstrið öll mengi á forminu

$$S(\Phi, \Delta) = \{g \in G \mid g(\Phi) \subseteq \Delta\},$$

þar sem Φ er þjappað (þ.e.a.s. endanlegt) hlutmengi í Ω og Δ er opið (þ.e.a.s. eitthvert) hlutmengi í Ω . Einfalt er að sjá að þetta er sama grannmynstur og skilgreint var hér að ofan.

Annar eiginleiki sem mætti nota til að skilgreina umraðanagrannmynstrið er að runa $\{g_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ er sameitin í umraðanagrannmynstrinu ef og aðeins ef fyrir

sérhvernum punkt $\alpha \in \Omega$ gildir að til er tala i_0 þannig að um öll $i, j \geq i_0$ gildi að $g_i(\alpha) = g_j(\alpha)$. Þetta má líka orða þannig að runan $\{g_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ sé samleitinn í umraðanagrannmynstrinu á G ef og aðeins ef runan $\{g_i(\alpha)\}_{i \in \mathbb{N}}$ sé samleitinn í strjála grannmynstrinu á Ω fyrir sérhvernum punkt $\alpha \in \Omega$. Það að runa sé samleitinn í strjála grannmynstrinu þýðir að runan stoppar og er fasti frá einhverjum punkti.

2.3. Net og sjálfmótanir þeirra

Skilgreining 10. Net (óstefnt net) er tvennd (V, E) þar sem V er mengi og E er mengi tveggja staka hlutmengja úr V . Stökin í V eru kallaðir *hnútar* og stak $\{v, w\} \in E$ kallast *leggur* í netinu. Við segjum að hnútar v og w séu *grannar* ef $\{v, w\}$ er leggur.

Örvanet $\Gamma = (V, E)$ er tvennd þar sem V er mengi og E er hlutmengi í $E \subseteq V \times V$. Stökin í V kallast *hnútar* og stökin í E kallast *örvar*. Við segjum að v og w séu *grannar* ef (v, w) eða (w, v) er ör í Γ .

Ef um alla hnúta $v \in V$ gildir að $(v, v) \notin E$ þá segjum við að örvanetið sé *einfalt*.

Fyrir einfalt örvanet Γ má skilgreina *samsvarandi óstefnt net* þannig að óstefnda netið hafi sömu hnúta og örvanetið, og $\{v, w\}$ sé leggur í óstefnda netinu ef og aðeins ef (v, w) sé ör í örvanetinu.

Athugasemd: Gera má sér mynd af neti með því að hugsa hnútana sem punkta og legg $\{v, w\}$ sem strik á milli v og w . Ef netið er stefnt þá má hugsa ör (v, w) sem ör sem stefnir frá v til w .

Skilgreiningarnar hér á eftir miðast við örvanet en með smávægilegum umorðunum má fá skilgreiningar á samsvarandi hugtökum fyrir óstefnd net.

Útstig hnútar v í örvaneti Γ er fjöldi allra hnúta w þannig að (v, w) sé ör í Γ og innstig hnútarins er fjöldi allra hnúta w þannig að (w, v) sé ör í Γ . Skilgreinum stig v sem fjölda granna v . Ef stig allra hnúta í örvaneti Γ er endanlegt segjum við að örvanetið sé *staðendanlegt*.

Örvanet er sagt vera *samanhangandi* ef hægt er að ferðast á milli sérhverra tveggja hnúta með því að fara eftir örvunum (ekki nauðsynlega í rétta stefnu), þ.e.a.s. örvanet er samanhagandi ef fyrir sérhverja tvo hnúta v og w er til runa af hnútum $v = v_0, v_1, \dots, v_n = w$ þannig að fyrir öll $i = 0, 1, \dots, n-1$ sé (v_i, v_{i+1}) eða (v_{i+1}, v_i) ör í örv-

anetinu. Slík runa er kölluð (óstefndur) *vegur* og er sagt að *lengd* hans sé n .

Fyrir hnúta v og w í samanhagandi örvaneti skilgreinum við $d(v, w)$ sem minnstu mögulegu lengd á vegi sem byrjar í v og endar í w . Auðvelt er að sýna að d er firð á V .

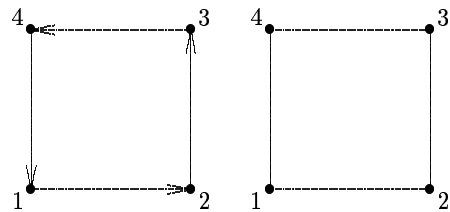
Skilgreining 11. Látum $\Gamma = (V, E)$ vera örvanet. Gagntæk vörpun $g : V \rightarrow V$ kallast *sjálfmótun* á Γ þegar um alla hnúta v, w í Γ gildir að $(v, w) \in E$ ef og aðeins ef $(g(v), g(w)) \in E$. Grúpa G verkar á Γ sem *grúpa sjálfmótana* ef G verkar á V og sérhvert stak í G verkar sem sjálfmótun á Γ . Grúpa allra sjálfmótana örvanetsins Γ kallast sjálfmótana grúpa Γ , táknúð $\text{Aut}(\Gamma)$.

Athugið að þegar grúpa G verkar á mengi V þá verkar hún líka á eðlilegan hátt á mengið $V \times V$ þannig að $g(v, w) = (g(v), g(w))$. Grúpa G sem verkar á mengi V er grúpa sjálfmótana örvanets $\Gamma = (V, E)$ ef E sem er hlutmengi í $V \times V$ er óbreytt undir öllum stökum grúpunnar G , þ.e.a.s. ef $g(E) = E$ fyrir öll stök $g \in G$. Af þessu sést auðveldlega að samskeyting tveggja sjálfmótana er aftur sjálfmótun.

Skilgreining 12. Ef $\text{Aut}(\Gamma)$ er gegnvirk á V þá segjum við að örvanetið Γ sé *gegnvirkt*.

Í gegnvirku örvaneti líta allir hnútarnir í örvanetinu „eins“ út, t.d. hafa sérhverjir tveir hnútar í Γ sama útstig og sama innstig. Sjáum líka að sé g sjálfmótun samanhagandi örvanets Γ þá er $d(v, w) = d(g(v), g(w))$ fyrir alla hnúta v og w í Γ .

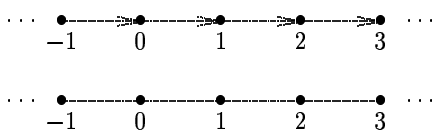
Dæmi. Á myndinni hér fyrir neðan er örvanet Γ_1 til vinstri og samsvarandi óstefnt net Γ_2 til hægri.



Látum a tákna umröðun á hnútum Γ þannig að $a(1) = 2$, $a(2) = 3$, $a(3) = 4$ og $a(4) = 1$. Þessi umröðun er greinilega sjálfmótun Γ_1 og má sjá hana fyrir sér sem snúning um fjórðung úr hring um miðpunkt ferningsins. Auðvelt er að sjá að sérhver sjálfmótun Γ_1 fæst með slíkum snúningi. Því er

$\text{Aut}(\Gamma_1) = \{e, a, a^2, a^3\}$, þ.e.a.s. sjálfmótana grúpan er rásuð með fjögur stök.

Umröðun samsvarandi a hér að ofan er einnig sjálfmótun Γ_2 , en því til viðbótar fáum við „speglanir“. Til dæmis er umröðun b sem festir hnúta 1 og 3 og víxlar á 2 of 4 sjálfmótun netsins Γ_2 . Sjálfmótanagrúpan $\text{Aut}(\Gamma_2)$ hefur 8 stök $e, a, a^2, a^3, b, ba, ba^2, ba^3$ og er oft nefnd *tvíflötungsgrúpan* með átta stök.



Efst á myndinni hér að ofan sést hluti af óendanlegu örvaneti. Ljóst er að einu sjálfmótanir netsins felast í hliðrunum. Sjálfmótanagrúpan er óendanleg rásuð grúpa og er einsmóta samlagningar grúpu heillra talna. Samsvarandi óstefnt net hefur fleiri sjálfmótanir því til viðbótar við hliðranirnar koma speglanir, til dæmis b sem er skilgreind þannig að $b(n) = -n$. Látum a tákna hliðrun til hægri um eitt skref þannig að $a(n) = n + 1$. Sjálfmótanagrúpan er spönnuð af a og b og er oft nefnd *óendanlega tvíflötungsgrúpan*.

3. Samspil grannmynsturs og grúpuverkunar

Rifjum upp enn eina skilgreiningu úr grannfræði. Grannmynstur á G er sagt vera *Hausdorff* ef um sérhver tvö ólík stök $g, h \in G$ gildir að til eru tvö sundurlæg opin mengi þannig að annað mengið innihaldi g og hitt innihaldi h .

Setning 13. Látum G vera grúpu sem verkar á mengi Ω . Þá er verkunin trúföst ef og aðeins ef umraðanagrannmynstrið á G er Hausdorff.

Sönnun: Gerum ráð fyrir að verkunin sé trúföst. Ef g og h eru ólík stök í grúpunni þá er til punktur α í Ω þannig að $g(\alpha) \neq h(\alpha)$. Sjáum að $B(\{\alpha\}, g)$ og $B(\{\alpha\}, h)$ eru sundurlæg opin mengi og það fyrri inniheldur g og það seinna inniheldur h .

Gerum nú ráð fyrir að grannmynstrið á G sé Hausdorff. Látum $g \neq e$ vera stak í G . Þá er til opið mengi í grannmynstrinu sem inniheldur g en ekki e . Það má augljóslega gera ráð fyrir að þetta mengi

sé á forminu $B(\Phi, g)$ þar sem Φ er endanlegt hlutmengi í Ω . Þar sem $e \notin B(\Phi, g)$ þá getur g ekki fest alla punktana í Φ . (Sagt er að stak $g \in G$ festi punkt $\alpha \in \Omega$ ef $g(\alpha) = \alpha$.) Því er verkun G trúföst.

Athugið að umraðanagrannmynstrið greinir ekki á milli staka sem eru í kjarna verkunar G á Ω og þannig má sjá beint að ef verkunin er ekki trúföst þá er grannmynstrið ekki Hausdorff. Síðan sést að umraðanagrannmynstrið er strjált ef mengið Ω er endanlegt og verkunin er trúföst.

Kyrragrúpur punkta í Ω eru opnar í G samkvæmt skilgreiningunni á grannmynstrinu. Það er alþekkt staðreynd um granngrúpur að opin hlutgrúpa er líka lokuð. Það sést af því að fyllimengi hlutgrúpunnar má rita sem sammengi hjámengja hennar, hjámenginu eru opin (hlutgrúpan sjálf er opin), því er fyllimengið opið og þar með er hlutgrúpan sjálf lokuð.

Grannrúm er sagt *samanhangandi* ef einu hlutmengin sem eru bæði opin og lokuð eru tóma mengið og allt rúmið. *Samhengisþættir* grannrúms eru skilgreindir þannig að þeir séu óstækkanleg samhangandi hlutmengi. Tveir punktar x og y eru greinilega í ólíkum samhengisþáttum ef til er mengi sem er bæði opið og lokað og inniheldur annan punktinn en ekki hinn. Grannrúm er sagt *algjörlega ósamanhangandi* ef einu samhangandi hlutmengin eru eins staks mengi og samhengisþættirnir því eins staks mengi. Dæmi um algjörlega ósamanhangandi grannrúm er $\mathbf{Q}$ sem hlutrum í $\mathbf{R}$ og p -legu tölurnar $\mathbf{Q}_p$.

Setning 14. Gerum ráð fyrir að G sé grúpa sem verkar trúfast á mengi Ω . Þá er G með umraðanagrannmynstrinu algjörlega ósamanhangandi.

Sönnun: Tökum tvö ólík stök g og h úr G . Þar sem verkun G á Ω er trúföst þá er til punktur α í Ω þannig að $g(\alpha) \neq h(\alpha)$. Því er g innihaldið í opna menginu $B(\{\alpha\}, g)$ en h er ekki í þessu mengi. Athugið að fyllimengi $B(\{\alpha\}, g)$ er mengið

$$\bigcup \{B(\{\alpha\}, k) \mid k(\alpha) \neq g(\alpha)\}.$$

Fyllimengi $B(\{\alpha\}, g)$ er því líka opið (sammengi af opnum mengjum). Sýnt hefur verið að mengið $B(\{\alpha\}, g)$ er bæði opið og lokað, inniheldur g en ekki h og þar með er fengið að g og h eru ekki í sama samhengisþætti G . Af þessu sést að samhangisþættir G innihalda bara eitt stak hver og því er G algjörlega ósamanhangandi.

Við segjum að umraðanagrúpa G sem verkar á mengi Ω sé lokuð ef hún er lokuð hlutgrúpa í $\text{Sym}(\Omega)$ þar sem $\text{Sym}(\Omega)$ hefur umraðanagrannmynstrið. Þegar reynt er að beita granngrúpufræðum á umraðanagrúpur þá er oft nauðsynlegt að gera ráð fyrir að grúpan sem fengist er við sé lokuð umraðanagrúpa. Þetta rýrir ekki notagildi granngrúpufræða svo mjög því skilyrðið að umraðanagrúpa sé lokuð hefur eðlilega túlkun og einnig getur það gerst að þeir eiginleikar sem við höfum áhuga á breytist ekki þó að við athugum lokun G í $\text{Sym}(\Omega)$ í stað G .

Fyrsta stigs kerfi M á Ω samanstendur af föllum $f_i : \Omega^{n_i} \rightarrow \Omega$, þar sem $i \in I$ og n_i er náttúrulega tala, venslum R_j þar sem $R_j \subseteq \Omega^{m_j}$ fyrir $j \in J$ og m_j er náttúruleg tala, og föstum $c_k \in \Omega$ fyrir $k \in K$. (Mengin I, J og K eru einhver heppileg vísamengi). Venja er að rita $R_j(\omega_1, \dots, \omega_{m_j})$ í stað $(\omega_1, \dots, \omega_{m_j}) \in R_j$. Dæmi um fyrsta stigs kerfi eru t.d. grúpur (tvö föll, margföldun og andhverfa, og einn fasti, hlutleysan) og örvanet (ein tvístæð vensl). Umröðun g á Ω er sjálfmótun kerfisins M ef og aðeins ef

- (i) fyrir öll $i \in I$ og alla punkta $(\omega_1, \dots, \omega_{n_i}) \in \Omega^{n_i}$ gildir að $f_i(g(\omega_1), \dots, g(\omega_{n_i})) = g(f_i(\omega_1, \dots, \omega_{n_i}))$;
- (ii) fyrir öll $j \in J$ og alla punkta $(\omega_1, \dots, \omega_{m_j}) \in \Omega^{m_j}$ gildir $R_j(\omega_1, \dots, \omega_{m_j})$ ef og aðeins ef $R_j(g(\omega_1), \dots, g(\omega_{m_j}))$;
- (iii) fyrir öll $k \in K$ gildir að $g(c_k) = c_k$.

Sjálfmótanagrúpa fyrsta stigs kerfis M er táknuð $\text{Aut}(M)$. Um fyrsta stigs kerfi er fjallað í þeirri grein rökfræði sem kallast líkanafræði (e. model theory). Í þeim fræðum er líka gagnlegt að skoða umraðanagrúpur sem granngrúpur en þær þælingar tengjast lítt venjulegum granngrúpufræðum.

Setning 15. (Sjá [1, Section 1.3 og Section 2.4]) *Umraðanagrúpa G á mengi Ω er lokuð ef og aðeins ef $G = \text{Aut}(M)$ fyrir eitthvert fyrsta stigs kerfi M á Ω .*

Í Fylgisetningu 17 hér á eftir verður farið í gegnum sönnun á því að sjálfmótanagrúpa örvanets sé lokuð umraðanagrúpa.

Setning 16. *Gerum ráð fyrir að umraðanagrúpa G á mengi Ω sé lokuð og að um öll $\alpha \in \Omega$ gildi að allar brautir kyrragrúpunnar G_α séu endanlegar. Þá eru hlutgrúpunnar G_α þjappaðar.*

Sönnun: Táknum brautir grúpunnar G_α með O_i þar sem i er í einhverju vísamengi I . Hlutgrúpan H í $\text{Sym}(\Omega)$ sem skilur allar brautirnar eftir óhreyfðar er eins og grúpan $\prod_{i \in I} \text{Sym}(O_i)$ (við getum gert hvað sem er á hverri braut, óháð því hvað við gerum á hinum brautunum). Þessi hlutgrúpa er lokuð í G . Þau mengi í grenndagrunninum fyrir $\text{Sym}(\Omega)$ sem skera H eru á forminu $B(\Phi, g)$ þar sem $g \in H$. Með því að velja $\Phi = O_i$ þá er hægt að fá opið mengi í H þar sem öll stökin í opna menginu gera eitthvað tiltekið á O_i en síðan geta þau gert hvað sem er á O_j þegar $j \neq i$. Því sjáum við að grannmynstrið sem H fær sem hlutgrúpa í G er það sama og H fær þegar við gefum $\text{Sym}(O_i)$ strjála grannmynstrið og H margfeldisgrannmynstrið (sjá [13, Section 2-8]). Þar sem grúpan $\text{Sym}(O_i)$ er endanleg þá er hún þjöppuð. Samkvæmt setningu Tychonovs (sjá [13, Section 5-1]) er grúpan $H = \prod_{i \in I} \text{Sym}(O_i)$ þá einnig þjöppuð. Þar sem G er lokuð hlutgrúpa í $\text{Sym}(\Omega)$ þá er lokun G_α í $\text{Sym}(\Omega)$ jöfn lokun G_α í G . Grúpan G_α er lokuð í G og því líka lokuð hlutgrúpa í $\text{Sym}(\Omega)$. Því er G_α lokuð hlutgrúpa í H og þar með fæst að G_α er þjöppuð.

Nú verðum við aftur að rifja upp skilgreiningu úr grannfræði. Grannrúm X er sagt vera staðþjappað ef um sérhvern punkt $x \in X$ gildir að til er þjappað mengi sem inniheldur opna grennd um x . Látum G vera umraðanagrúpu sem verkar á mengi Ω þannig að fyrir einhvern punkt $\alpha \in \Omega$ hafi G_α bara endanlegar brautir. Hlutgrúpan G_α er samkvæmt ofansögðu bæði opin og þjöppuð og hjámengi hennar gG_α er opið og þjappað mengi sem inniheldur g . Því er G staðþjöppuð granngrúpa. Flokkur staðþjappaðra granngrúpna er sérlega fyrirferðarmikill í granngrúpufræðum enda eru þær mikilvægar í stærðfræðigreiningu og diffurrúmfræði. Á slíka grúpu má skilgreina mál, svokallað Haar-mál (kennt við ungverska stærðfræðinginn Alfred Haar (1885–1933)), og þannig verður kleift að beita aðferðum úr stærðfræðigreiningu við athuganir á grúpunni. Haar-málið hefur þann eiginleika að það er óbreytt við allar vinstri hliðranir. Þekktasta dæmið um Haar-mál er venjulega Lebesgue-málið á rauntölurnar.

Fylgisetning 17. *Ef $\Gamma = (V, E)$ er samhangandi staðendanlegt örvanet (hver hnútur hefur aðeins endanlega marga granna) og $G = \text{Aut}(\Gamma)$ er grúpa allra sjálfmótana netsins Γ þá er G með umraðanagrannmynstrinu staðþjöppuð granngrúpa.*

Sönnun: Við þurfum fyrst að sýna að grúpan G sé lokuð í grúpu allra umraðana á V . Gerum ráð fyrir að h sé stak í lokun G í $\text{Sym}(\Omega)$. Ef h er ekki sjálfmótun á Γ þá eru til punktar v og w í V þannig að $(v, w) \in E$ en $(h(v), h(w)) \notin E$ eða þá $(v, w) \notin E$ en $(h(v), h(w)) \in E$. Þar sem h er í lokun G þá sker opna grenndin $B(\{v, w\}, h)$ um h mengið G . Segjum sem svo að $g \in G \cap B(\{v, w\}, h)$. Þá er $g(v) = h(v)$ og $g(w) = h(w)$, en það fær ekki staðist því g er sjálfmótun Γ . Sjáum af þessu að G er lokuð hlutgrúpa í $\text{Sym}(V)$.

Allar brautir kyrragrupunnar G_v eru endanlegar því Γ er staðendanlegt örvanet og sjálfmótanir örvanetsins varðveita fjarlægðir. Nú getum við vísað til Setningar 16, og ályktað að G_v sé þjöppuð hlutgrúpa í G . Það að G er staðþjöppuð leiðir svo beint af því að G_v er líka opin hlutgrúpa í G .

Áður en við skoðum hvernig nota má tengsl milli grannmynsturs og grúpuverkunar til að svara spurningum um umraðangrúpur og granngrúpur skulum við skoða nánar hvernig grannfræðilega hugtakið „þjappað“ tengist grúpuverkunum.

Fylgisetning 18. ([23, Lemma 2]) *Látum $\Gamma = (V, E)$ vera staðendanlegt örvanet. Hlutmengi $U \subseteq G = \text{Aut}(\Gamma)$ hefur þjappaða lokun $\overline{U}$ þá og því aðeins að mengið $Uv = \{u(v) \mid u \in U\}$ sé endanlegt fyrir alla hnúta $v \in V$.*

Sönnun: Gerum fyrst ráð fyrir að U hafi þjappaða lokun. Tökum einhvern punkt $v \in V$. Fjölskyldan $\{uG_v\}_{u \in \overline{U}}$ er opin þakning á $\overline{U}$. Þar sem mengið $\overline{U}$ er þjappað má finna endanlega hlutþakningu $u_1G_v, u_2G_v, \dots, u_nG_v$. Stak $u \in U$ er því í einhverju þessara mengja, segjum $u \in u_iG_v$. Þá er til $g \in G_v$ þannig að $u = u_i g$ og svo fæst að $u(v) = (u_i g)(v) = u_i(g(v)) = u_i(v)$. Af þessu sést að $Uv = \{u_1(v), u_2(v), \dots, u_n(v)\}$.

Gerum ráð fyrir að mengið Uv sé endanlegt fyrir hnút v í Γ . Ritum $Uv = \{u_1(v), u_2(v), \dots, u_n(v)\}$ þar sem $u_1, u_2, \dots, u_n$ eru stök í U . Af þessu leiðir að $U \subseteq u_1G_v \cup u_2G_v \cup \dots \cup u_nG_v$. Mengið $u_1G_v \cup u_2G_v \cup \dots \cup u_nG_v$ er þjappað og lokað því það er endanlegt sammengi lokaðra þjappaðra mengja. Lokun U er því innihaldin í þjöppuðu mengi og er því sjálf þjöppuð.

Athugið að ef braut Uv er endanleg fyrir einhvern hnút v í Γ þá er brautin Uw endanleg fyrir alla hnúta

w í Γ . Þetta sést af því að sjálfmótanir Γ varðveita fjarlægðir og ef $d = d(v, w)$ þá eru hnútarnir í Uw í fjarlægð að mesta lagi d frá endanlega menginu Uv . Hnútar sem eru ekki í meiri fjarlægð en d frá Uv eru aðeins endanlega margir svo Uw er endanlegt mengi.

Skilgreining 19. (a) Stak g í granngrúpu G er sagt *lotubundið* ef rásaða hlutgrúpan $\langle g \rangle = \{g^i \mid i \in \mathbb{Z}\}$ hefur þjappaða lokun í G .

(b) Stak g í granngrúpu G er sagt vera FC^- -stak ef samokaflokkur g hefur þjappaða lokun í G . (Samokaflokkur g í G er mengið $\{hgh^{-1} \mid h \in G\}$.)

Eftirfarandi fylgisetningu má sanna með sömu aðferð og notuð var til að sanna Setningu 5.

Fylgisetning 20. *Látum g vera stak í $\text{Sym}(\Omega)$ þar sem Ω er eitthvert mengi. Þá er g lotubundið (í $\text{Sym}(\Omega)$) þá og því aðeins að allar brautir g séu endanlegar.*

Hér höfum við skoðað hvað „lítil“ hlutmengi (þ.e.a.s. hlutmengi með þjappaða lokun) gera. Við getum líka athugað hvað „stór“ hlutmengi gera. Ein möguleg lýsing á því að hlutgrúpa H í granngrúpu G sé stór er að deildarúmið G/H sé þjappað og er þá sagt að hlutgrúpan H sé hjáþjöppuð.

Setning 21. ([14, Lemma 1.7] og [11, Lemma 7.5]) *Látum G vera lokaða umraðangrúpu sem verkar gegnvirkt á mengi Ω . Gerum ráð fyrir að kyrragrupur punkta í Ω séu þjappaðar. Hlutgrúpa H í G er hjáþjöppuð ef og aðeins ef H hefur aðeins endanlega margar brautir á Ω .*

Látum Γ vera samanhangandi staðendanlegt örvanet. Sjálfmótun g er sögð *takmörkuð* ef til er fasti C þannig að $d(v, g(v)) \leq C$ fyrir alla hnúta v í Γ . Sjáum að um alla hnúta v í Γ og öll stök h í $\text{Aut}(\Gamma)$ gildir

$$\begin{aligned} d(v, (hgh^{-1})(v)) &= d((hh^{-1})(v), (hgh^{-1})(v)) \\ &= d(h^{-1}(v), (gh^{-1})(v)) \\ &= d(h^{-1}(v), g(h^{-1}(v))) \\ &\leq C. \end{aligned}$$

Höfum því sýnt að hgh^{-1} er líka takmörkuð sjálfmótun. Auðvelt er að sjá að margfeldi tveggja takmarkaðra sjálfmótanna er aftur takmörkuð sjálfmótun og andhverfa takmarkaðrar sjálfmótunar er líka takmörkuð sjálfmótun. Takmarkaðar sjálfmótanir mynda því normlega hlutgrúpu $B(\Gamma)$ í $\text{Aut}(\Gamma)$.

Setning 22. ([23, Lemma 4]) *Látum $\Gamma = (V, E)$ vera samanhangandi staðendanlegt gegnvirkt örvanet. Stak g í $\text{Aut}(\Gamma)$ er takmörkuð sjálfmótun Γ ef og aðeins ef samokaflokkur g í $\text{Aut}(\Gamma)$ hefur þjappaða lokun í $\text{Aut}(\Gamma)$.*

Sönnun: Gerum fyrst ráð fyrir að g sé takmörkuð sjálfmótun. Samkvæmt Fylgisetningu 18 þurfum við að sýna að brautir samokaflokks g séu allar endanlegar. Eins og áður hefur verið minnst á nægir að sýna að ein braut sé endanleg. Vitum að til er tala C þannig að $d(v, g(v)) \leq C$ fyrir alla hnúta v í Γ . Eins og við sáum hér að ofan þá gildir að $d(v, (hgh^{-1})(v)) \leq C$ fyrir öll stök $h \in G$. Þar sem gert er ráð fyrir að Γ sé staðendanlegt örvanet þá eru aðeins endanlega margir hnútar í fjarlægð minni eða jafnri C frá v og því er braut v við verkun samokaflokks g endaleg.

Gerum nú ráð fyrir $g \in \text{Aut}(\Gamma)$ og að samokaflokkur g hafi þjappaða lokun. Þá er braut punkts v við verkun samokaflokksins endanleg og því er til tala C þannig að $d(v, (hgh^{-1})(v)) \leq C$ fyrir öll stök $h \in \text{Aut}(\Gamma)$. Tökum nú einhvern hnút w í Γ . Finnum stak $h \in \text{Aut}(\Gamma)$ þannig að $h(w) = v$ (þetta er hægt því gert er ráð fyrir að $\text{Aut}(\Gamma)$ verki gegnvirkt á V). Þá er

$$\begin{aligned} d(w, g(w)) &= d(h^{-1}(v), g(h^{-1}(v))) \\ &= d((hh^{-1})(v), (hgh^{-1})(v)) \\ &= d(v, (hgh^{-1})(v)) \leq C. \end{aligned}$$

Þar með er sýnt að g er takmörkuð sjálfmótun.

4. Notkun

Í þessum hluta er ætlunin að sýna dæmi um hvernig nýta má tengslin sem útskýrð hafa verið hér að framman. Fyrst verður rætt um tvær setningar rússneska stærðfræðingsins Trofimov. Sannanir Trofimovs eru langar og tyrfnar en með því að gramsa í granngrúpu-dótinu er hægt að setja saman stuttar sannanir á setningum hans. Jafnframt er hægt að nota eina af niðurstöðum Trofimovs til að sanna almenna setningu um granngrúpur. Síðan snúum við okkur að fræðabálki Ástralans Willis. Niðurstöður hans má einnig setja fram með vísan til umraðana og örvaneta. Hér verður ekki farið í gegnum það allt heldur aðeins útskýrt hvernig má nýta þau tengsl til að sanna niðurstöðu um mengi lotubundinna staka í algjörlega ósamanhangandi granngrúpu.

4.1. Setningar Trofimovs

Til að geta útskýrt næstu niðurstöðu þurfum við fleiri skilgreiningar. Ein algengasta uppspretta gegnvirkra örvaneta er grúpufræði. Skilgreininguna má rekja aftur til 1878. Látum G vera gefna grúpu og S hlutmengi í G . Cayley-örvanet grúpunnar G með tilliti til mengisins S , táknað með $\Gamma = \text{Cay}(G, S)$, er skilgreint þannig að hnútar Γ séu stök in G og $(g, h) \in G \times G$ sé ör í Γ ef og aðeins ef til er stak $s \in S$ þannig að $h = gs$. Á hliðstæðan hátt má skilgreina óstefnt Cayley-net fyrir grúpuna G þannig að hnútarnir séu stök in G og ef $g, h \in G$ þá sé $\{g, h\}$ leggur í Γ ef og aðeins ef til er stak $s \in S$ þannig að $h = gs$ eða $g = hs$. Eftirfarandi staðreyndir um Cayley-örvanet eru auðsannaðar:

(a) Cayley-örvanet er samanhangandi ef og aðeins ef mengið S spannar grúpuna G .

(b) Cayley-örvanet er gegnvirkt og grúpan G verkar eðlilega á örvanetið sem grúpa sjálfmótanna. Þessi verkun grúpunnar G er gefin þannig að ef $g \in G$ og x er hnútur í Γ (líka stak í G) þá er $g(x) = gx$.

Ef $\Gamma = (V, E)$ er örvanet og $\sim$ eru jafngildisvöxl á hnútamengi Γ þá skilgreinum við kvótaörvanetið $\Gamma/\sim$ þannig að hnútamengi $\Gamma/\sim$ sé mengi jafngildisflokka og ef A og B eru tveir jafngildisflokkar þá er (A, B) ör í $\Gamma/\sim$ ef og aðeins ef til eru hnútar $a \in A$ og $b \in B$ í Γ þannig að (a, b) sé ör í Γ . Ef jafngildisvöxl $\sim$ eru varðveitt af öllum sjálfmótunum Γ (þ.e.a.s. verkun $\text{Aut}(\Gamma)$ á V gefur verkun á mengi jafngildisflokka) þá verkar $\text{Aut}(\Gamma)$ eðlilega á $\Gamma/\sim$ sem grúpa sjálfmótanna. Sér í lagi gildir að ef Γ er gegnvirkt örvanet þá er $\Gamma/\sim$ líka gegnvirkt örvanet. Á svipaðan hátt má skilgreina kvótanet fyrir óstefnd net.

Trofimov hefur fundið tæmandi lýsingu á öllum samanhangandi staðendanlegum örvanetum Γ þannig að takmörkuðu sjálfmótanirnar í $B(\Gamma)$ verki gegnvirkt á V . Setningin hljóðar í smávægilegri umorðun svona:

Setning 23. ([17]) *Látum Γ vera samanhangandi staðendanlegt óstefnt net. Þá eru eftirfarandi tvö skilyrði jafngild:*

- (i) *grúpa allra takmarkaðra sjálfmótana á Γ verkar gegnvirkt á Γ ;*
- (ii) *til eru jafngildisvöxl $\sim$ á Γ með endanlega jafngildisflokka þannig að $\text{Aut}(\Gamma)$ varðveiti vöxlina og*

örvanetið $\Gamma/\sim$ sé staðendanlegt óstefnt Cayley-net grúpunnar $\mathbf{Z}^n$ fyrir eitthvert n .

Sönnun Trofimovs er löng og flókin. Með grannmynstrið að vopni auk tiltölulega einfaldrar niðurstöðu úr granngrúpufræðum má fá sönnun á niðurstöðu Trofimovs sem er rétt um ein síða að lengd (sjá [10]).

Í þessu samhengi má einnig geta um aðra skilda setningu Trofimovs þar sem vaxtarhraði nets er tengdur við grúpufræðilega eiginleika sjálfmótana grúpu netsins. Látum Γ vera samanhagandi staðendanlegt óstefnt gegnvirkt net. Fyrir hnút v í Γ skilgreinum við $B(v, n) = \{w \in V \mid d(v, w) \leq n\}$. Netið Γ er sagt hafa margliðuvöxt ef til eru fastar c_1 og c_2 þannig að fyrir öll n gildi að $|B(v, n)| \leq c_1 n^{c_2}$. (Vegna þess að Γ er gegnvirkt þá skiptir valið á v ekki máli.)

Endanlega spönnuð grúpa G er sögð hafa margliðuvöxt ef til er endanlegt spannmengi S þannig að Cayley-netið með tilliti til S hafi margliðuvöxt. (Auðvelt er að sýna að ef Cayley-net með tilliti til eins endanlegs spannmengis S_0 hefur margliðuvöxt, þá hafa öll Cayley-net með tilliti til endanlegra spannmengja margliðuvöxt.)

Við segjum að grúpa G sé næstum núllvalda ef G inniheldur núllvalda hlutgrúpu N þannig að mengið G/N sé endanlegt. Fræg setning eftir Wolf [24] og Gromov [6] segir að endanlega spönnuð grúpa hafi margliðuvöxt þá og því aðeins að hún sé næstum núllvalda. Hluti Wolfs er sönnun þess að endanlega spönnuð næstum núllvalda grúpa hafi margliðuvöxt en Gromov sannaði að ef endanlega spönnuð grúpa hefur margliðuvöxt þá er hún næstum núllvalda. Hluti Gromovs í setningunni er mun erfiðari og byggir sönnun Gromovs á ákaflega djúpum og frumlegum hugmyndum og nýtir auk þess lausnina á fimmta verkefni Hilberts. Fimmta verkefni Hilberts snýst einmitt um granngrúpur. Trofimov hefur útvíkkad þessa setningu.

Setning 24. ([18]) *Látum Γ vera staðendanlegt samanhagandi óstefnt gegnvirkt örvanet. Þá eru eftirfarandi tvö skilyrði jafngild:*

(i) Γ hefur margliðuvöxt;

(ii) til eru jafngildisvensl $\sim$ á hnútamengi Γ þannig að jafngildisflokkarnir séu endanlegir, jafngildisvenslin séu varðveitt af $\text{Aut}(\Gamma)$, kyrragrúpur hnúta í $\text{Aut}(\Gamma/\sim)$ séu endanlegar og $\text{Aut}(\Gamma/\sim)$ sé endanlega spönnuð og næstum núllvalda.

Sönnun Trofimovs er aftur mjög löng og flókin og byggir á því að vísa til setningar Gromovs. Woess [23] hefur fundið stutta sönnun á setningu Trofimovs og byggir sönnun Woess á að vísa til útvíkkunar fyrir granngrúpur á setningu Gromovs í stað þess að vísa til sjálfrar setningar Gromovs.

Hér hafa granngrúpufræðin verið nýtt til að fá einfaldari sannanir á setningum um net og umraðanagruppur, en það má líka snúa dæminu við og nýta grúpuverkanir og umraðanagrannmynstrið til að sanna setningar um granngrúpur.

Setning 25. ([12]) *Látum G vera algjörlega ósamanhangandi staðþjappaða granngrúpu. Gerum auk þess ráð fyrir að til sé þjappað hlutmengi í G sem spannar grúpuna G . Táknum með N hlutgrúpu allra þeirra staka í G sem hafa samokaflokk sem hefur þjappaða lokun. Þá er N lokuð hlutgrúpa í G .*

Vandinn er að sýna að N sé lokuð hlutgrúpa. Til eru dæmi um algjörlega ósamanhangandi staðþjappaðar granngrúpur G þannig að N sé ekki lokuð hlutgrúpa, en þessar grúpur hafa ekki þjappað hlutmengi sem spannar þær. Lykillinn að sönnun Setningar 25 er að sýna að skilyrðið að G hafi þjappað spannmengi sé jafngilt því að til sé samanhagandi staðendanlegt net Γ þannig að G verki sem gegnvirk grúpa sjálfmótana á Γ og allar kyrragrúpur hnúta séu bæði þjappaðar og opnar. Þegar þetta er komið þá er hægt að vísa beint í þá afleiðingu Setningar 23 að þegar Γ er samanhagandi staðendanlegt gegnvirkt net þá er hlutgrúpan $B(\Gamma)$ í $\text{Aut}(\Gamma)$ lokuð (sjá [19] og [23, Theorem 3]).

4.2. Fræðabálkur Willis

Flokkur algjörlega ósamanhangandi staðþjappaðra granngrúpna er víðfeðmur. Til dæmis inniheldur hann allar grúpur ef við notumst við strjála grannmynstrið. Önnur dæmi eru fylkjagrúpur yfir p -legar tölur og fylkjagrúpur yfir ræðar tölur með eðlilegu grannmynstri. Samkvæmt því sem kemur fram hér að framan bætast við sjálfmótanagruppur staðendanlegra samanhagandi örvaneta þegar notað er umraðanagrannmynstrið. Lengi vel var svo að „eina“ almenna setningin um algjörlega ósamanhangandi staðþjappaðar granngrúpur var setning Dantzig frá 1936 [4], þar sem sýnt er að slík grúpa inniheldur alltaf hlutgrúpu sem er bæði opin og þjöppuð. Við lok síðustu aldar varð að endingu breyting þar á þegar George Willis

[20] (sjá einnig [22]) birti almennar niðurstöður um þennan flokk grúpa. Willis og samstarfsfólk hans hefur nýtt þessar niðurstöður til að svara nokkrum gömlum spurningum um granngrúpur. Í [11] er sýnt hvernig allar helstu niðurstöður fræðabálks Willis má leiða út og túlka með því að nota örvanet og grúpuverkanir. Hér er ekki ætlunin að útskýra fræði Willis, þess í stað verður sýnt hvernig hægt er að nota útleggunguna úr [11] til að fá stutta sönnun á einni af niðurstöðum Willis sem tengist fyrri athugunum okkar á hvað „þjappað“ þýðir í umraðanagrannmynstrinu.

Eins og áður var sagt þá kallast stak g í granngrúpu lotubundið ef rásaða grúpan $\langle g \rangle$ hefur þjappað lokun. Þegar horft er á Fylgisetningu 20 hér að framan er eðlilegt að hugsa þessi stök sem einhverskonar „snúninga“. Á hinn bóginn má líta á þau stök sem eru ekki lotubundin, og hafa því allar brautir óendanlegar, sem „hliðranir“. Hversu vel er hægt að nálga hliðrun með snúningi? Hugsum um $\mathbf{R}^2$ og leggjum venjulegan skilning í „snúning“ og „hliðrun“. Skilgreinum nú G sem grúpuna sem er spönnuð af hliðrunum og snúningunum. Hægt að nálga hliðrun með snúningum hversu vel sem maður vill á þjöppuðu hlutmengi í $\mathbf{R}^2$. Þetta má orða þannig að mengi snúninga sé þétt í G þegar notað er þjappað-opið grannmynstrið. Þessu er öfugt farið þegar við erum að glíma við algjörlega ósamanhangandi staðþjappaðar granngrúpur.

Setning 26. ([21, Theorem 2]) *Látum G vera algjörlega ósamanhangandi staðþjappaða granngrúpu. Táknum með $P(G)$ mengi allra lotubundinna staka í G . Þá er $P(G)$ lokað hlutmengi í G .*

Byrjum á að skilgreina hugtakið *háörvagegnavirkt örvanet*. Við höfum örvanet Γ og skoðum runur ólíkra hnúta $v_0, v_1, \dots, v_n$ þannig að fyrir $i = 0, 1, \dots, n-1$ er (v_i, v_{i+1}) ör í Γ . Slíka runur nefnum við *örvaveg af lengd n* . Fyrir fasta tölu n þá verkar $\text{Aut}(\Gamma)$ á mengi örvavega af lengd n . Ef þessi verkun er gegnvirk fyrir allar tölur n þá segjum við að örvanetið Γ sé *háörvagegnavirkt*. Dæmi um slíkt örvanet er tré þar sem allir hnútar hafa innstig 1 og útstig 2. Þessi tegund örvaneta var fyrst rannsökuð í [3]. Meðal annars er sýnt þar að í óendanlegu samanhagandi háörvagegnavirku örvaneti þar sem allir hnútar hafa endanlegt útstig eru engir örvahringir (ekki mögulegt að finna hnúta $v_0, v_1, \dots, v_n$ þannig að $v_0 = v_n$, hnútarnir $v_0, v_1, \dots, v_{n-1}$ séu ólíkir og

(v_i, v_{i+1}) er ör í Γ fyrir $i = 0, 1, \dots, n-1$), sjá [3, Proposition 3.10].

Í [11, Sections 2, 3 og 4] er sýnt að ef við byrjum með algjörlega ósamanhangandi granngrúpu G þá getum við búið til háörvagegnavirkt örvanet sem hún verkar á sem grúpa sjálfmótana. Látum x vera stak í G og U vera þjappaða og opna hlutgrúpu í G (slík hlutgrúpa er alltaf til samkvæmt setningu Dantzig sem vitnað var til hér að ofan). Setjum $V = G/U$. Látum v_0 tákna eitthvert stak í V . Setjum $v_1 = x(v_0)$. Skilgreinum svo mengið E sem braut raðtvenndarinnar (v_0, v_1) undir verkun G á V . Höfum þá örvanet $\Gamma = (V, E)$. Brautir grúpu á raðtvenndir eru oft kallaðar *brautlingar* og örvanet sem er búið til á sama hátt og Γ hér að ofan eru kölluð *brautlingaörvanet*. Greinilegt er að G verkar gegnvirkt á örvanetið Γ sem grúpa sjálfmótana. Tökum einnig eftir að mengi sem er opið í G í umraðanagrannmynstrinu er líka opið í G í upphaflega grannmynstrinu, því kyrragrúpur punkta í V eru opnar í G . Í [11] er sýnt að velja má U þannig að örvanetið Γ sé háörvagegnavirkt. Ef x er ekki lotubundið þá er braut v_0 við verkun x er óendanleg. Þetta síðasta atriði tryggir að mengi þeirra hnúta sem hægt er að komast til með vegi frá v_0 sé óendanlegt. Ef við skoðum bara mengi þeirra hnúta sem hægt er að komast til frá v_0 eftir (óstefndum) vegi ásamt þeim örvum í Γ sem liggja á milli tveggja hnúta í þessu mengi þá erum við með óendanlegt háörvagegnavirkt örvanet og stig allra hnútanna eru endanleg.

Gerum nú ráð fyrir að x sé í lokun $P(G)$ og x sé ekki lotubundið. Nú er xG_{v_0} opin grennd um x svo xG_{v_0} inniheldur eitthvert stak g úr $P(G)$. Samkvæmt Fylgisetningu 20 þá hefur g bara endanlegar brautir á V . Athugum nú braut v_0 . Setjum nú $v_i = g^i(v_0)$. Þar sem braut v_0 undir g er endanleg og $v_1 \neq v_0$ þá er til tala $n \geq 2$ þannig að $v_n = v_0$. En þá er $v_0, v_1, \dots, v_n$ örvahringur sem er í mótsögn við niðurstöðuna sem getið var um úr [3].

Þá er fengin mótsögn og við ályktum að það sé ómögulegt að lokun $P(G)$ innihaldi stak sem er ekki lotubundið.

Þessa sönnun ásamt frekari niðurstöðum um háörvagegnavirkt örvanet og hagnýtingar þeirra í granngrúpufræðum má finna í [8].

Þakkir: Höfundur hefur notið styrkja frá Rannís við þær rannsóknir sem lýst er hér.

Summary: It is shown how one can use a group action of a group G on a set Ω to define a topology on the group making it into a topological group. The topological properties of the topological group G are linked to properties of the action of G on Ω . Several applications of these connections are described.

Heimildir

- [1] P. J. Cameron, *Oligomorphic Permutation Groups*, London Mathematical Society Lecture Note Series 152, CUP, Cambridge 1990.
- [2] P. J. Cameron, Metric and Topological Aspects of the Symmetric Group of Countable Degree, *Europ. J. Combinatorics* **17** (1996), 135–142.
- [3] P. J. Cameron, C. E. Praeger and N. C. Wormald, Infinite highly arc transitive digraphs and universal covering digraphs, *Combinatorica* **13** (1993), 377–396.
- [4] D. van Dantzig, Zur topologischen Algebra III. Brouwersche und Cantorsche Gruppen, *Compos. Math.* **3** (1936), 408–426.
- [5] F. Ghahramani, V. Runde and G. Willis, Derivations on group algebras, *Proc. London Math. Soc.* **80** (2000), 360–390.
- [6] M. Gromov, Groups of polynomial growth and expanding maps, *Publ. Math. IHES*, **53** (1981), 53–78.
- [7] A. Karass og D. Solitar, Some remarks on the infinite symmetric groups, *Math. Z.*, **66** (1956), 64–69.
- [8] A. Malnic, D. Marusic, R. G. Möller, N. Seifter, V. Trofimov og B. Zgrablic, *Highly arc transitive digraphs: reachability and topological groups*, handrit sent til birtingar, 14 síður.
- [9] I. Maurer, Les groupes de permutations infinies (á rúmensku), *Gaz. Mat. Fiz. Ser. A*, **7** (1955), 400–408.
- [10] R. G. Möller, Topological groups, automorphisms of infinite graphs and a theorem of Trofimov, *Disc. Math.* **178** (1998), 271–275.
- [11] R. G. Möller, Structure theory of totally disconnected locally compact groups via graphs and permutations, *Canadian J. Math.* **54** (2002), 795–827.
- [12] R. G. Möller, FC^- -elements in totally disconnected groups and automorphisms of infinite graphs, *Math. Scand.* **92** (2003), 261–268.
- [13] J. R. Munkres, *Topology: a first course*, Prentice-Hall, New Jersey 1975.
- [14] C. Nebbia, Minimally almost periodic totally disconnected groups, *Proc. Amer. Math. Soc.* **128** (2000), 347–351.
- [15] G. Schlichting, Polynomidentitäten und Permutationsdarstellungen lokalkompakter Gruppen, *Invent. Math.* **55** (1979), 97–106.
- [16] G. Schlichting, Operationen mit periodischen Stabilisatoren, *Arch. Math.* **34** (1980), 97–99.
- [17] V. I. Trofimov, Automorphisms of graphs and a characterization of lattices, *Math USSR Izv.* **22** (1984), 379–392.
- [18] V. I. Trofimov, Graphs with polynomial growth, *Math USSR Sb.* **51** (1985), 405–418.
- [19] V. I. Trofimov, Automorphism groups of graphs as topological groups, *Math. Notes* **38** (1985), 717–720.
- [20] G. Willis, The structure of totally disconnected, locally compact groups, *Math. Ann.* **300** (1994), 341–363.
- [21] G. Willis, Totally disconnected groups and proofs of conjectures of Hofmann and Mukherjea, *Bull. Austral. Math. Soc.* **51** (1995), 489–494.
- [22] G. Willis, Further properties of the scale function on a totally disconnected group, *J. Algebra* **237** (2001), 142–164.
- [23] W. Woess, “Topological groups and infinite graphs” in *Directions in Infinite Graph Theory and Combinatorics*, (ritstjóri R. Diestel), Topics in Discrete Math. 3, North Holland, Amsterdam 1992. (Líka í *Discrete Math.* **95** (1991), 373–384.)
- [24] J. A. Wolf, Growth of finitely generated solvable groups and curvature of Riemannian manifolds, *J. Differential Geometry* **2** (1968), 421–466.

Um höfundinn: Rögnvaldur lauk BS prófi í stærðfræði frá Háskóla Íslands 1988 og doktorsprófi frá Oxford-háskóla 1991. Síðan hann lauk doktorsprófi hefur hann starfað hjá Raunvísindastofnun Háskólans. Rannsóknir hans eru á sviði grúpufræði.

Raunvísindastofnun Háskólans
Dunhaga 3
IS-107 Reykjavík
roggi@raunvis.hi.is

Móttékin: 15. febrúar 2002