Tímarit um raunvísindi og stærðfræði
1. árg. 1. hefti 2003 – raust.is/2003/1/09

Föll sem verka á hlutrúm

Eggert Briem

Háskóla Íslands

Vefútgáfa: 4. september 2003

Ágrip – Í þessari grein er fjallað um föll sem verka með samskeytingu á rúm af föllum. Við ætlum nær eingöngu að fjalla um alhæfingu á setningu sem var sönnuð af J. Wermer árið 1963, sem segir að ef A er fallaalgebra á X og raunhluti A er lokaður gagnvart margföldun þá er $A = C(X, \mathbf{R})$. Sú alhæfing sem hér er sett fram er ekki ný af nálinni, fyrsta sönnun birtist árið 1981. Aðferðirnar sem hér eru notaðar byggja á eldri hugmyndum, en einnig eru notuð svokölluð andsamhverf mengi sem gerir framsetninguna aðgengilegri. Aðferðirnar sem hér er lýst má síðan nota á fleiri verkefni um föll sem verka á hlutrúm.

Oft er hægt að nálga flókin föll með einfaldari föllum. Setning Weierstrass segir, að sérhvert samfellt raungilt fall á lokuðu og takmörkuðu bili I á rauntalnaásnum, megi nálga í jöfnum mæli á I með margliðum (sér í lagi er hægt að nálga hið hvergi diffranlega fall Weierstrass í jöfnum mæli með margliðum og þannig með þjálum föllum).

Nú er mengi margliða dæmi um algebru af föllum. Alhæfing Stones á setningu Weierstrass segir, að ef B er algebra af samfelldum raungildum föllum á lokuðu og takmörkuðu bili I sem aðgreinir punkta í I og inniheldur fastaföllin, þá megi nálga sérhvert samfellt raungilt fall á I í jöfnum mæli á I með föllum úr B. Raunar segir alhæfing Stones að í stað I megi setja lokað og takmarkað hlutmengi af hinu n-víða evklíðska rúmi, eða enn almennar, þjappað Hausdoffrúm X. Ef bætt er við skilyrðinu að B sé lokað gagnvart samleitni í jöfnum mæli þá segir setning Stones, að sérhvert samfellt raungilt fall á X sé í B.

Hvað nú ef B er lokað gagnvart annars konar samleitni en samleitni í jöfnum mæli á X? Þá er ekki lengur hægt að segja að sérhvert samfellt raungilt fall á X sé í B, eins og t.d. algebran B af öllum samfellt diffranlegum raungildum föllum á lokuðu og takmörkuðu bili I sýnir. Niðurstaðan er hins vegar óbreytt fyrir vissar gerðir af algebrum B og einnig fyrir veikara skilyrði en skilyrðið að B sé lokað gagnvart margföldun falla. Umorðum það skilyrði í setningu Stones. Að B sé algebra af föllum jafngildir því að B sé vektorrúm og að b^2 sé í B hvenær sem b er úr B. Síðasta skilyrðið má líka orða þannig að samskeyting fallsins $h(t) = t^2$ og sérhvers falls úr B sé í B. Nú má spyrja að því hvort fallið $h(t) = t^2$ hafi hér einhverja sérstöðu. Hér erum við komin inn á svið fallareiknings fyrir B. Um þetta verður fjallað hér á eftir, sérstaklega í því tilviki þar sem B er raunhluti fallaalgebru.

Hér á eftir mun X ávallt tákna óendanlegt, þjappað Hausdorffrúm og $C(X, \mathbf{C})$ tákna rúm allra samfelldra tvinntölugildra falla á X. Tilsvarandi rúm rauntölugildra falla er táknað með $C(X, \mathbf{R})$. *Fallaalgebra* á X er hlutrúm af $C(X, \mathbf{C})$ sem einnig er lokað gagnvart margföldun, inniheldur fastaföll, aðgreinir punkta í X og er lokað gagnvart samleitni í jöfnum mæli á X. Ef síðasta skilyrðinu er sleppt tölum við um *algebru af föllum* á X. Sem dæmi um fallaalgebru aðra en $C(X, \mathbf{C})$ má taka hina svonefndu *skífualgebru* eða *diskalgebru* sem er algebra allra samfelldra falla á lokuðu einingarskífunni í tvinntalnaplaninu sem eru fáguð innan skífunnar.

Rúmin $C(X, \mathbf{C})$ og $C(X, \mathbf{R})$ eru fullkomin normrúm, *Banachrúm*, með norminu

$$\|f\|_{\infty,X} = \sup_{x \in X} |f(x)|.$$

Þetta norm kallast *sup-normið*. Ljóst er að um öll samfelld föll f og g á X gildir

$$\|fg\|_{\infty,X} \leq \|f\|_{\infty,X} \cdot \|g\|_{\infty,X}.$$

Látum nú A vera fallaalgebru á X. *Raunhluti* A, táknaður ReA, er rúm raunhluta falla í A. Sem hlutrúm af $C(X, \mathbf{R})$ er ReA normrúm með sup-norminu. Rúmið ReA er hins vegar ekki fullkomið í sup-norminu nema $A = C(X, \mathbf{C})$ og þar með Re$A = C(X, \mathbf{R})$. (Þessi setning er kennd við K. Hoffman og J. Wermer, sjá [6]). Hins vegar er ReA fullkomið í norminu

$$\|b\| = \inf\{\|a\|_{\infty,X} \mid a \in A \text{ og } b = \mathrm{Re}a\}.$$

Greinilegt er að $\|b\| \geq \|b\|_{\infty,X}$, normið $\|\cdot\|$ *yfirgnæfir* sup-normið. Í [9] sýndi J. Wermer fram á að ef ReA er lokað gagnvart margföldun, þ.e. ReA er algebra af föllum, þá er Re$A = C(X, \mathbf{R})$ og þar með $A = C(X, \mathbf{C})$. Nú er

$$bc = 1/4((b+c)^2 - (b-c)^2)$$

svo að ReA er algebra af föllum ef $b^2 \in \mathrm{Re}A$ hvenær sem $b \in \mathrm{Re}A$. Við ætlum að setja þetta síðasta skilyrði fram á annan hátt.

Rauntölugilt fall h skilgreint á bili I á rauntalnaásnum er sagt *verka* á ReA, nánar tiltekið *verka með samskeytingu* á ReA, ef samskeytta fallið $h \circ b$ er í ReA hvenær sem b er í ReA og samskeytingin er skilgreind, þ.e. b varpar X inn í I.

Greinilega verkar sérhvert *línufall*, þ.e. fall af gerðinni $h(t) = \alpha t + \beta$, á ReA. Nú má spyrja þeirrar spurningar hvort önnur föll en línuföll geti verkað á ReA ef Re$A \neq C(X, \mathbf{R})$. Skilyrðið $b^2 \in \mathrm{Re}A$ ef $b \in \mathrm{Re}A$ má umorða og segja að fallið $h(t) = t^2$ verki á ReA. Niðurstaða Wermers er sú að fallið $h(t) = t^2$ geti einungis verkað á ReA ef Re$A = C(X, \mathbf{R})$ og þar með $A = C(X, \mathbf{C})$. Það var síðan í nokkrum áföngum gerð grein fyrir því að í stað fallsins $h(t) = t^2$ má hér setja hvaða fall sem er. (Nema línufall að sjálfsögðu.) Sjá [1], [7] og [4].

Setning 1. (Bernard, Sidney, Hatori). *Lát A vera fallaalgebru á X. Ef* ReA *á sér verkandi fall sem er ekki línufall þá er ReA* $= C(X, \mathbf{R})$ *og þar með* $A = C(X, \mathbf{C})$.

Við ætlum að setja fram sönnun á þessari setningu sem er ekki alveg eins tæknilega erfið og eldri sannanir. Í sönnuninni þurfum við á þekktum niðurstöðum um fallaagebrur að halda, setningu Baire, alhæfingu á Stone-Weierstrass setningunni og tækni sem A. Bernard innleiddi.

Ein útgáfa af Stone-Weierstrass setningunni segir að ef B er algebra af raungildum föllum á X þá er B þétt í $C(X, \mathbf{R})$. Að B sé lokað gagnvart margföldun er jafngilt því að fallið $h(t) = t^2$ verki á B. Næsta setning sem er útgáfa fyrir rauntölugild föll á tilsvarandi setningu eftir Y. Katznelson fyrir tvinntölugild föll er því alhæfing á Stone-Weierstrass setningunni.

Setning 2. *Lát B vera hlutrúm af $C(X, \mathbf{R})$ sem aðgreinir punkta í X og inniheldur fastaföll. Ef til er samfellt fall sem verkar á B og sem er ekki línufall þá er B þétt í $C(X, \mathbf{R})$ í sup-norminu.*

Sönnun. Þar sem h er samfellt þá verkar h líka á $\overline{B}$, lokun B í sup-norminu. Gerum fyrst ráð fyrir því að h sé a.m.k. tvisvar samfellt diffranlegt innan skilgreiningarbils síns I. Ef s er innri punktur I þá er

$$h(s+t) + h(s-t) - 2h(s) = h''(s)t^2 + o(t^2).$$

Veljum $b_0 \in B$ þannig að $b_0(X)$ liggi innan I. Fyrir $b \in B$ og lítið gildi á rauntölu t er

$$\begin{aligned} h \circ (b_0 + tb) + h \circ (b_0 - tb) - 2h \circ b_0 \\ = (h'' \circ b_0)t^2 b^2 + o(t^2 b^2). \end{aligned}$$

Þar sem fallið vinstra megin er í B fæst, með því að deila með t^2 og láta t stefna á 0 að

$$(h'' \circ b_0)b^2 \in \overline{B}.$$

Látum nú b_0 vera fastafallið sem tekur bara gildið s, þar sem s er valið þannig að $h''(s) \neq 0$. Við sjáum að $b^2 \in \overline{B}$. Þetta gildir um öll $b \in B$ og þar með líka um öll $b \in \overline{B}$. Samkvæmt Stone-Weierstrass setningunni er því $\overline{B} = C(X, \mathbf{R})$.

Í almenna tilfellinu fæst, með viðeigandi vali á C^∞-falli φ með stoð í lítilli grennd um 0, fall $h_1 = h * \varphi$, földun h með φ, skilgreint á aðeins minna bili en I, sem er nógu nálægt h til að vera ekki línufall. C^∞-fallið h_1 verkar á $\overline{B}$. Þetta sést með því að nálga heildið

$$h_1 \circ b = \int (h \circ (b - t))\varphi(t)dt$$

með Riemannsummum. Samkvæmt fyrri hluta sönnunarinnar er $\overline{B} = C(X, \mathbf{R})$.

Við gætum nú reynt að sanna setningu 1 á svipaðan hátt. Fyrst þarf að sanna að h sé samfellt. Það er tiltölulega einfalt mál og verður gert síðar. Síðan er hægt að vísa í setningu 2. En sú setning gefur einungis þær upplýsingar að ReA sé þétt í $C(X, \mathbf{R})$ sem er ekki jafngilt Re$A = C(X, \mathbf{R})$. (Einskorðun skífualgebrunnar við einingarhringinn Γ er dæmi um fallaalgebru A þar sem ReA er þétt í en ekki jafnt $C(X, \mathbf{R})$. Þetta er vegna þess að diskalgebran inniheldur allar margliður og ef við einskorðum þær við Γ og skrifum $z = \cos\theta + i\sin\theta$ þá sést að ReA inniheldur föllin $\cos n\theta$, $\sin n\theta$ fyrir hvaða n sem er. Einnig er vitað að til eru samfelld þýð föll á skífunni með ótakmörkuð samoka þýð föll.) Slíkar fallaalgebrur kallast *Dirichletalgebrur*. Það þarf því meira að koma til. Hér koma runurúm A. Bernards til sögunnar.

Látum D vera normrúm með normi $\|\cdot\|_D$ og Λ vera óendanlegt mengi. Λ-fjölskylda af stökum úr D er vörpun $\tilde{f} = (f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} : \Lambda \to D$. Þótt Λ sé ekki endilega teljanlegt munum við venjulega nota orðið Λ-*runa* eða bara runa í stað Λ-fjölskylda. Runurúmið $\ell^\infty(\Lambda, D)$ er rúmið af öllum takmörkuðum Λ-runum, þ.e.a.s.

$$\ell^\infty(\Lambda, D) = \{\tilde{d} = (d_\lambda) \mid d_\lambda \in D \ \forall\lambda \in \Lambda \text{ og } \sup_{\lambda\in\Lambda} \|d_\lambda\|_D < \infty\},$$

með norminu

$$\|\tilde{d}\| = \sup_{\lambda\in\Lambda} \|d_\lambda\|_D.$$

Látum nú C vera normrúm og B vera hlutrúm af C sem er Banachrúm í normi sem yfirgnæfir normið frá C, þ.e. til er tala $k > 0$ þannig að $\|b\|_C \le k\|b\|_B$ fyrir öll $b \in B$. Þar með er $\ell^\infty(\Lambda, B) \subseteq \ell^\infty(\Lambda, C)$ fyrir hvaða Λ sem er. Runurúm eru m.a. áhugaverð vegna eftirfarandi niðurstöðu sem gengur undir nafninu Lemma Bernards, sjá [1].

Setning 3. (Lemma Bernards). *Ef $\ell^\infty(\Lambda, B)$ er þétt í $\ell^\infty(\Lambda, C)$ þá er $B = C$.*

Í upphaflegri útgáfu Bernards var $\Lambda = \mathbf{N}$. Notagildi niðurstöðu Bernards fellst í því að oft er auðveldara að sýna fram á að eitt normrúm sé þétt í öðru en að rúmin séu þau sömu. Við munum nota dálítið breytta útgáfu af Lemmu Bernards síðar og setja þá fram sönnun.

Við getum nú reynt að sanna að $\ell^\infty(\Lambda, \mathrm{Re}A)$ sé þétt í $\ell^\infty(\Lambda, C(X, \mathbf{R}))$ með því að nota svipaða aðferð og í sönnun á setningu 2. Normið á ReA, sem var skilgreint hér að framan, yfirgnæfir sup-normið. En þá kemur upp vandamál. Þótt $h \circ b_\lambda$ sé skilgreint fyrir sérhvert λ og $\sup_{\lambda\in\Lambda} \|b_\lambda\| < \infty$, þ.e. $(b_\lambda) \in \ell^\infty(\Lambda, \mathrm{Re}A)$ er ekki þar með sagt að $\sup_{\lambda\in\Lambda} \|h \circ b_\lambda\| < \infty$, þ.e. að $(h \circ b_\lambda) \in \ell^\infty(\Lambda, \mathrm{Re}A)$. Við getum bara ályktað að $\sup_{\lambda\in\Lambda} \|h \circ b_\lambda\|_{\infty,X} < \infty$.

Til að ná fram einhverskonar takmörkunarskilyrði notum við setningu Baire. Sú útgáfa af Baire setningunni sem við þurfum á að halda segir að kúlu í Banachrúmi sé ekki hægt að skrifa sem teljanlegt sammengi hvergi þéttra mengja. Með því að setja $h(\alpha(t - t_0))$ í stað $h(t)$ getum við gert ráð fyrir því að skilgreiningarbil h innihaldi $(-1, 1)$ og að h sé ekki línufall í neinni grennd um 0. Látum nú $b_0 \in \mathrm{Re}A$, $\|b_0\| < 1/2$ og látum δ vera tölu, $0 < \delta < 1/2$. Þar sem $h \circ (b_0 + b) \in \mathrm{Re}A$ ef $b \in (\mathrm{Re}A)_\delta$, δ-kúlu ReA, þá er

$$(\mathrm{Re}A)_\delta = \bigcup_{n\in\mathbf{N}} \{b \in \mathrm{Re}A \mid \|b\| \le \delta \text{ og } \|h \circ (b_0 + b)\| \le n\}.$$

Samkvæmt setningu Baire þá inniheldur lokun einhvers mengjanna á hægri hlið kúlu. Því er til $b_1 \in \mathrm{Re}A$, $\|b_1\| < \delta$, tölur $\epsilon, M > 0$ og þétt hlutmengi B_ϵ af $(\mathrm{Re}A)_\epsilon$ þannig að

$$\|h \circ (b_0 + b_1 + b)\| \le M$$

fyrir öll $b \in B_\epsilon$. Ef Λ er óendanlegt mengi, ef $(b_\lambda) \in \ell^\infty(\Lambda, \mathrm{Re}A)$, þar sem $b_\lambda \in B_\epsilon$ fyrir sérhvert λ og ef $c_\lambda = b_0 + b_1 + b_\lambda$ fyrir sérhvert λ, þá er $h \circ (c_\lambda) \in \ell^\infty(\Lambda, \mathrm{Re}A)$. Í þessum takmarkaða skilningi verkar h á $\ell^\infty(\Lambda, \mathrm{Re}A)$. Við setjum þessa niðurstöðu, sem er að finna hjá S.S. Sidney [7], fram sem hjálparsetningu:

Hjálparsetning 4. *Ef h, skilgreint á bilinu $(-1, 1)$, verkar á $\mathrm{Re}A$ og $b_0 \in \mathrm{Re}A$, $\|b_0\| < 1/2$, þá eru til tölur $\epsilon, M > 0$, stak $b_1 \in \mathrm{Re}A$, $\|b_1\| + \epsilon < 1/2$, og þétt hlutmengi B_ϵ af $(\mathrm{Re}A)_\epsilon$ þannig að*

$$\|h \circ (b_0 + b_1 + b)\| \le M,$$

ef $b \in B_\epsilon$.

Ef við ætlum að nota setningu 2 þá verðum við að geta litið á $\ell^\infty(\Lambda, C(X, \mathbf{R}))$ sem rúm af samfelldum föllum á þjöppuðu Hausdorffrúmi. Þessu náum við fram með eftirfarandi hætti: Við setjum dreifða grannmynstrið á Λ og lítum síðan á stökin í $\ell^\infty(\Lambda, C(X, \mathbf{R}))$ sem föll á $\beta(\Lambda \times X)$, Stone-Čech þjöppun $\Lambda \times X$, með því að setja

$$\tilde{f}(\gamma, x) = f_\gamma(x)$$

fyrir $\tilde{f} = (f_\lambda) \in \ell^\infty(\Lambda, C(X, \mathbf{R}))$ og $(\gamma, x) \in \Lambda \times X$. Þar eð $\Lambda \times X$ er þétt í $\beta(\Lambda \times X)$ er hér um einsmótun milli $\ell^\infty(\Lambda, C(X, \mathbf{R}))$ og $C(\beta(\Lambda \times X), \mathbf{R})$ að ræða. Við getum þannig litið á $\ell^\infty(\Lambda, \mathrm{Re}A)$ sem hlutrúm af $C(\beta(\Lambda \times X), \mathbf{R})$. Þar eð $\mathrm{Re}A$ inniheldur fastaföll gerir $\ell^\infty(\Lambda, \mathrm{Re}A)$ það líka. Það eina sem nú vantar uppá er að $\ell^\infty(\Lambda, \mathrm{Re}A)$ aðgreini punkta í $\beta(\Lambda \times X)$, að $\mathrm{Re}A$ sé *ofuraðgreinandi* á X í skilningi A. Bernards, sjá [1].

Til að geta sýnt fram á að $\mathrm{Re}A$ sé ofuraðgreinandi á X þurfum við á að halda nokkrum vel þekktum niðurstöðum um fallaalgebrur og í framhaldi af þeim nokkrum hjálparsetningum.

Lát A vera fallaalgebru á X. Hlutmengi E af X er sagt *andsamhverft* m.t.t. A ef sérhvert fall í A sem er raungilt á E er fastafall á E. Sérhvert andsamhverft hlutmengi E af X er hlutmengi í óstækkanlegu andsamhverfu mengi. Óstækkanlegt andsamhverft mengi er lokað og ef E er slíkt mengi þá er algebran af einskorðun falla í A við E fallaalgebra á E. Ennfremur er $A = C(X, \mathbf{C})$, ef einspunktsmengin eru einu andsamhverfu mengin. Þessar niðurstöður er t.d. að finna í [3].

Hjálparsetning 5. *Lát A vera fallaalgebru á X, E vera óstækkanlegt andsamhverft mengi og $b \in \mathrm{Re}A$. Þá er $b(E)$ bil (hugsanlega einspunktsmengi).*

Sönnun. Hugsum okkur að $b(E)$ sé ekki bil. Veljum $a \in A$ þannig að $b = \mathrm{Re}a$. Veljum síðan sundurlæga lokaða rétthyrninga R_1 og R_2 í tvinntalnaplaninu þannig að $a(E) \subseteq R_1 \cup R_2$ en $a(E) \not\subseteq R_i$ fyrir $i = 1, 2$. Samkvæmt setningu Runges þá er til runa (p_n) af margliðum þannig að $p_n \to 0$ í jöfnum mæli á R_1 og $p_n \to 1$ í jöfnum mæli á R_2. Þar eð $p_n \circ a \in A$ fyrir sérhvert n þá er til fall a_1 á E, sem er einskorðun falls í A við E, þannig að $a_1 = 0$ á $a^{-1}(R_1) \cap E$ og $a_1 = 1$ á $a^{-1}(R_2) \cap E$, í mótsögn við að E er andsamhverft mengi.

Hjálparsetning 6. *Lát h verka á $\mathrm{Re}A$. Þá er h samfellt.*

Sönnun. Ef $A = C(X, \mathbf{C})$ þá er $\mathrm{Re}A = C(X, \mathbf{R})$ svo að $h \circ f$ er samfellt fall ef f er samfellt og samskeytingin er skilgreind. Þar sem X er óendanlegt er auðvelt að sýna fram á að h hlýtur að vera samfellt. Að öðrum kosti er til óstækkanlegt andsamhverft mengi E sem inniheldur fleiri en eitt stak. Lát I vera bilið sem h er skilgreint á og lát t_0 vera innri punkt I. Veljum $x, y \in E$ og $b \in \mathrm{Re}A$ þannig að $b(x) < 0$ og $b(y) > 0$. Með hæfilegu vali á tölum α, β fæst fall $b_1 = \alpha b + \beta \in \mathrm{Re}A$ þannig að $b_1(E) \subseteq I$, $b_1(x) < t_0$ og $b_1(y) > t_0$, og þar með er $b_1(E)$ bil með t_0 sem innri punkt. Þar sem $h \circ b_1 \in \mathrm{Re}A$ er $h \circ b_1$ sér í lagi samfellt fall og þar með er h samfellt í punktinum t_0. Sönnunin er svipuð ef $t_0 \in I$ er endapunktur I.

Sönnun á næstu hjálparsetningu má finna í [1]. Við setjum hér fram aðeins einfaldari sönnun.

Hjálparsetning 7. *Lát h og A vera eins og í setningu 1. Þá er $\mathrm{Re}A$ ofuraðgreinandi á X.*

Sönnun. Látum p, q vera tvo punkta í $\beta(\Lambda \times X)$. Veljum $\tilde{f} = (f_\lambda) \in \ell^\infty(\Lambda, C(X, \mathbf{R}))$ þannig að $|\tilde{f}(p) - \tilde{f}(q)| > 2$. Fyrir sérhvert $\lambda \in \Lambda$ veljum við síðan $b_\lambda \in \mathrm{Re}A$ þannig að $\|b_\lambda - f_\lambda\|_{\infty,X} < 1$. Þá er $\tilde{b} = (b_\lambda) \in \ell^\infty(\Lambda, C(X, \mathbf{R}))$ og $\|\tilde{b} - \tilde{f}\|_{\infty,\beta(\Lambda\times X)} < 1$ svo að $\tilde{b}(p) \neq \tilde{b}(q)$. En það sem við þurfum er stak í $\ell^\infty(\Lambda, \mathrm{Re}A)$ sem að greinir p og q. Veljum fyrir sérhvert $\lambda \in \Lambda$ fall $c_\lambda \in \mathrm{Re}A$ þannig að $b_\lambda + ic_\lambda \in A$ og látum $a_\lambda = \exp(b_\lambda + ic_\lambda)$. Þar sem $|a_\lambda| = \exp(b_\lambda)$ fyrir sérhvert $\lambda \in \Lambda$ þá er $\tilde{a} = (a_\lambda) \in \ell^\infty(\Lambda, A)$. Einnig er $|\tilde{a}| = \exp(\tilde{b})$ og þar með aðgreinir $\mathrm{Re}\tilde{a}$ eða $\mathrm{Im}\tilde{a}$ punktana p og q. (Athugið að $\exp((b_\lambda)) = ((\exp(b_\lambda))$ vegna þess að föllin taka sömu gildi á $\Lambda \times X$.)

Við höfum nú safnað saman nægjanlega miklu af tækjum og tólum til að sanna setningu 1.

Sönnun á setningu 1. Gerum ráð fyrir að $A \neq C(X, \mathbf{C})$ og látum E vera óstækkanlegt andsamhverft hlutmengi af X sem inniheldur fleiri en einn punkt. Við ætlum að nota setningar 2 og 3 til að sanna að til sé stak $x_0 \in E$ og þjöppuð grennd K um x_0 þannig að um rúmið $\mathrm{Re}A|K$, sem fæst með því að einskorða föllin í A við K, gildi $\mathrm{Re}A|K = C(K, \mathbf{R})$. Síðan er einfalt að sanna að þetta leiði til mótsagnar.

Látum Λ vera óendanlegt mengi sem verður ákveðið síðar. Við getum gert ráð fyrir því að h sé skilgreint á bilinu $(-1, 1)$ og ekki línufall í neinni grennd um 0, (setjum $k(t) = h(\alpha(t - t_0))$ í stað $h(t)$ ef þarf). Þar sem h er samfellt (hjálparsetning 6) og $\Lambda \times X$ er þétt í $\beta(\Lambda \times X)$ þá er $h \circ \tilde{f} = (h \circ f_\lambda)$ ef $\tilde{f} = (f_\lambda) \in \ell^\infty(\Lambda, C(X, \mathbf{R}))$ og samskeytingin er skilgreind, vegna þess að föllin $h \circ \tilde{f}$ og $(h \circ f_\lambda)$ eru eins á $\Lambda \times X$.

Samkvæmt hjálparsetningu 5 er til fall $b_0 \in \mathrm{Re}A$, $\|b_0\| < 1/2$, þannig að $b_0(E)$ er grennd um 0. Veljum tölu $\delta > 0$ þannig að $(b_0 + b)(E)$ sé grennd um 0 ef $\|b\| < \delta$. Samkvæmt hjálparsetningu 4 er til $b_1 \in \mathrm{Re}A$, $\|b_1\| < \delta$, tala $\epsilon > 0$ og þétt hlutmengi B_ϵ af $(\mathrm{Re}A)_\epsilon$ þannig að

$$h \circ (\tilde{b}_0 + \tilde{b}_1 + \tilde{b}) \in \ell^\infty(\Lambda, \mathrm{Re}A)$$

ef $\tilde{b} = (b_\lambda)$ og $b_\lambda \in B_\epsilon$ fyrir sérhvert $\lambda \in \Lambda$. Hér táknar $\tilde{b}_i$ rununa þar sem allir liðir eru b_i. Fyrst normið á ReA yfirgnæfir sup-normið fæst

$$h \circ (\tilde{b}_0 + \tilde{b}_1 + \tilde{b}) \in \overline{\ell^\infty(\Lambda, \mathrm{Re}A)}$$

ef $\tilde{b} \in \ell^\infty(\Lambda, \mathrm{Re}A)$ og $\|\tilde{b}\| < \epsilon$. Hér táknar yfirstrikun lokun í sup-norminu á $C(\beta(\Lambda \times X), \mathbf{R})$

Ef h er tvisvar samfellt diffranlegt fæst eins og í sönnun á setningu 2 að

$$\tilde{b}^2 \cdot h'' \circ (\tilde{b}_0 + \tilde{b}_1) \in \overline{\ell^\infty(\Lambda, \mathrm{Re}A)},$$

fyrir öll $\tilde{b} \in \ell^\infty(\Lambda, \mathrm{Re}A)$. Með því að nota jöfnuna $st = 1/4((s+t)^2 - (s-t)^2)$ fæst síðan

$$\tilde{b} \cdot \tilde{c} \cdot h'' \circ (\tilde{b}_0 + \tilde{b}_1) \in \overline{\ell^\infty(\Lambda, \mathrm{Re}A)}$$

fyrir öll $\tilde{b}, \tilde{c} \in \overline{\ell^\infty(\Lambda, \mathrm{Re}A)}$. Látum $d = b_0 + b_1$. Þar sem $d(E)$ er grennd um 0 og h'' er ekki núllfallið í neinni grennd um 0 er til $x_0 \in E$ þannig að $(h'' \circ d)(x_0) \neq 0$. Setjum

$$U = \{x \in X \mid (h'' \circ d)(x) \neq 0\}.$$

Þá er $|h'' \circ \tilde{d}| > 0$ á $\Lambda \times U$.

Ef h er ekki tvisvar samfellt diffranlegt notum við í stað h fall $h_1 = h * \varphi$ þar sem φ er C^∞-fall með stoð í lítilli grennd um 0. Með hæfilegu vali á φ fæst sama niðurstaða með fallinu h_1. Við höfum hér notfært okkur að samkvæmt hjálparsetningu 5 er $d(E)$, og þar með einnig $d(X)$, grennd um 0, en það byggist aftur á því að E er óstækkanlegt andsamhverft mengi. Ef ekki er vitað að $d(X)$ er grennd um 0 gæti verið að d varpaði X inn í bil þar sem h'' er 0.

Látum nú

$$\mathcal{M} = \{\tilde{f} \in \ell^\infty(\Lambda, C(X, \mathbf{R})) \mid \tilde{f} \cdot \ell^\infty(\Lambda, \mathrm{Re}A) \subseteq \overline{\ell^\infty(\Lambda, \mathrm{Re}A)}\}.$$

$\mathcal{M}$ er hlutrúm af $\overline{\ell^\infty(\Lambda, \mathrm{Re}A)}$ (v.þ.a. $\ell^\infty(\Lambda, \mathrm{Re}A)$ inniheldur fastaföll) og er jafnframt algebra af föllum á $\beta(\Lambda \times X)$. Ennfremur þá inniheldur $\mathcal{M}$, samkvæmt útreikningum hér að ofan, öll föll af gerðinni $\tilde{c} \cdot \tilde{d}$ þar sem $\tilde{c} \in \ell^\infty(\Lambda, \mathrm{Re}A)$. $\mathcal{M}$ inniheldur þar með, samkvæmt viðeigandi útgáfu á Stone-Weierstrass setningunni, öll föll í $C(\beta(\Lambda \times X), \mathbf{R})$, þ.e. í $\ell^\infty(\Lambda, C(X, \mathbf{R}))$, sem eru 0 á menginu $\{p \in \beta(\Lambda \times X) \mid \tilde{d}(p) = 0\}$. Þar eð $\mathcal{M}$ er hlutrúm af $\overline{\ell^\infty(\Lambda, \mathrm{Re}A)}$ fæst

$$\tilde{d} \cdot \ell^\infty(\Lambda, C(X, \mathbf{R})) \subseteq \overline{\ell^\infty(\Lambda, \mathrm{Re}A)}.$$

Nú er $\tilde{d}^2 \cdot \ell^\infty(\Lambda, C(X, \mathbf{R}))$ þétt í $\tilde{d} \cdot \ell^\infty(\Lambda, C(X, \mathbf{R}))$ og þar með er

$$\tilde{d} \cdot \ell^\infty(\Lambda, C(X, \mathbf{R})) \subseteq \overline{\tilde{d} \cdot \ell^\infty(\Lambda, \mathrm{Re}A)}.$$

Við notum nú aðferð sem notuð er við sönnun á Lemmu Bernards til að fá þjappaða grennd K um x_0 þannig að $\mathrm{Re}A|K = C(K, \mathbf{R})$. Látum Λ vera einingarkúlu $C(X, \mathbf{R})$ og látum $\tilde{f} = (f_\lambda) \in \ell^\infty(\Lambda, C(X, \mathbf{R}))$ vera rununa þar sem $f_\lambda = \lambda$ fyrir sérhvert $\lambda \in \Lambda$. Notum niðurstöðurnar að ofan og veljum $\tilde{b} = (b_\lambda) \in \ell^\infty(\Lambda, \mathrm{Re}A)$ þannig að

$$\|\tilde{d} \cdot \tilde{f} - \tilde{d} \cdot \tilde{b}\|_{\infty, \beta(\Lambda \times X)} \leq 1/4 \cdot \|d\|_{\infty, X},$$

sem jafngildir því að

$$\|df_\lambda - db_\lambda\|_{\infty, X} \leq 1/4 \cdot \|d\|_{\infty, X}$$

fyrir öll $\lambda \in \Lambda$. Setjum $K = \{x \in X \mid |d(x)| \geq 1/2 \cdot \|d\|_{\infty, X}\}$. Þá gildir

$$\|f_\lambda - b_\lambda\|_{\infty, K} \leq 1/2$$

fyrir öll $\lambda \in \Lambda$. Látum $M = \sup_{\lambda \in \Lambda} \|b_\lambda\|$. Þar sem sérhvert fall í $C(K, \mathbf{R})$ er einskorðun við K á falli í $C(X, \mathbf{R})$ með sama sup-norm höfum við fengið eftirfarandi niðurstöðu:

Fyrir sérhver $f \in C(K, \mathbf{R})$, $\|f\|_{\infty, K} \leq 1$, er til $b \in \mathrm{Re}A$, $\|b\| \leq M$, þannig að $\|f - b\|_{\infty, K} \leq 1/2$.

Tökum nú $f \in C(K, \mathbf{R})$, $\|f\|_{\infty, K} \leq 1$. Með þrepun veljum við $b_n \in \mathrm{Re}A$, $\|b_n\| \leq M$, þannig að

$$\|f - (b_1 + 1/2\, b_2 + \cdots + 1/2^{n-1}\, b_n)\|_{\infty, K} \leq 1/2^n.$$

Þá er $b = \sum 1/2^{n-1}\, b_n \in \mathrm{Re}A$ og $b = f$ á K. Samkvæmt vel þekktri setningu um fallaalgebrur þá er einnig sérhvert fall í $C(K, \mathbf{C})$ einskorðun falls í A við K, sjá [8].

Þar sem K er grennd um x_0 og A er Dirichletalgebra er hægt, með þekktum aðferðum úr fallaalgebrufræðum, að sýna fram á tilvist grenndar $U \subset K$ um x_0, þannig að A inniheldur öll samfelld föll á X sem eru 0 utan grenndarinnar U. En þetta er ómögulegt því að $x_0 \in E$, sem er andsamhverft mengi með fleiri en einn punkt. Þar með er sönnun á setningu 1 lokið.

Raunhluti fallaalgebru er dæmi um svokallað *Banachfallarúm* yfir $\mathbf{R}$, en með Banachfallarúmi á þjöppuðu Hausdorffrúmi X er átt við hlutrúm af $C(X, \mathbf{R})$ sem aðgreinir punkta í X, inniheldur fastaföll og er Banachrúm í normi sem yfirgnæfir sup-normið. Banach fallarúm $B \neq C(X, \mathbf{R})$ getur haft verkandi föll önnur en línuföllin, t.d. ef B er Banachalgebra eins og t.d. algebra allra rauntölugildra samfellt diffranlegra falla á bilinu $X = [0, 1]$ með norminu $\|f\| = \|f\|_{\infty,X} + \|f'\|_{\infty,X}$. Ef B er hins vegar ofuraðgreinandi, (sama skilgreining og hér að framan fyrir raunhluta fallaalgebru), hefur verið sýnt fram á að setning 1 á sér alhæfingu, með vissum undantekningum þó, sjá [2] and [5].

Summary The aim of this paper is to give a presentation of a well known result about operating functions for function spaces which is not too complicated but still gives insight into the basic methods used in this field.

Suppose A is a function algebra on a compact Hausdorff space X and let ReA denote the space of real parts of functons in A. A theorem of J. Wermer [9] says that if $b^2 \in$ ReA whenever $b^2 \in$ ReA, then $A = C(X, \mathbf{C})$ the space of all continuous complex valued functions on X. There is a generalization of this result: Let us say that a function h defined on an interval I on the real line *operates on* ReB if the composite function $h \circ b \in$ ReB whenever $b \in$ ReA and the composition is defined, i.e., b maps X into I. Thus Wermer's theorem says that if the function $h(t) = t^2$ operates on ReA then $A = C(X, \mathbf{C})$. The generalization says that $h(t) = t^2$ can be replaced by any non-affine function (non-affine means not of the form $h(t) = \alpha t + \beta$). That is, if a non-affine functon operates on ReA then $A = C(X, \mathbf{C})$ [4],[7]. We give here a proof based on older proofs but also using sets of anti-symmetry which makes the expositon more accessibe.

Heimildir

[1] A. Bernard, Espaces des parties réelles des éléments d'une algebre de Banach de fonctions, *J. Funct. Anal.* **10** (1972), 387-409

[2] E. Briem, Operating functions and ultraseparating function spaces, (Lecture Notes in *Pure and Appl. Math.* **136**). Marcel Dekker, New York 1992, 55-59

[3] T. Gamelin, Uniform algebras, Prentice-Hall, New Jersey 1969.

[4] O. Hatori, Functions which operate on the real part of a uniform algebra, *Proc. Amer. Math. Soc.* **83** (1981), 565-568

[5] O. Hatori, Separation properties and operating functions on a space of continuous functions, *Internat. J. Math.* **4** (1993), 551-600

[6] K. Hoffman and J. Wermer, A characterization of $C(X)$, *Pac. J. Math.* **12** (1962), 941-944

[7] S.J. Sidney, Functions which operate on the real part of a uniform algebra, *Pac. J. Math.* **80** (1979), 265-272

[8] S.J. Sidney and E.L. Stout, A note on interpolation, *Proc. Amer. Math. Soc.* **19** (1968), 380-382

[9] J. Wermer, The space of real parts of a function algebra, *Pac. J. Math.* **13** (1963), 1423-1426

Um höfundinn Eggert Briem er prófessor í stærðfærði við Háskóla Íslands.

Raunvísindastofnun Háskólans
Dunhaga 3, IS-107 Reykjavík
briem@hi.is

Móttekin: 15. maí 2003